

12a $H_n = 1,08 \cdot H_{n-1} - 30$ met $H_0 = 275$.

12b $H_n < 150$ (TABLE) $\Rightarrow n \geq 11 \Rightarrow$ voor het eerst op 1-7-2019.

12c 8% van 275 is $0,08 \cdot 275 = 22 \Rightarrow$ elk jaar 22 Schotse hooglanders verplaatsen.

n	u(n)
6	216,31
7	203,62
8	189,91
9	176,1
10	162,11
11	148,14
12	134,18

13a $B_n = 1,035 \cdot B_{n-1} - 500$ (nadat € 500 is opgenomen) met $B_0 = 17500$.

13b Bij 1-1-2015 hoort $n = 8$ (TABLE) $\Rightarrow B_8 \approx 18518,31$ (€).

13c $B_n \geq 20000$ (TABLE) $\Rightarrow n \geq 17 \Rightarrow$ voor het eerst 1-1-2024.

13d 3,5% van 17500 is 612,50 \Rightarrow elk jaar 612,50 (€) op te nemen op dat het saldo 17500 (€) blijft.

n	u(n)
13	18313
14	18489
15	18671
16	18859
17	19054
18	19256
19	19465

14a $u_n = 1,04 \cdot u_{n-1} - 1000$ met $u_0 = 10000$.

14b $n = 10$ (TABLE) $\Rightarrow u_{10} \approx 2796,34$ (€).

14c $u_n < 0$ (TABLE) $\Rightarrow n \geq 14 \Rightarrow u_{14} \approx -975,15$ (€).

Op 1-1-2020 is de schuld afgelost. Hij heeft dan in totaal $14 \times 1000 - 975,15 = 13024,85$ (€) terugbetaald.

n	u(n)
6	6020,2
7	5261
8	4471,5
9	3650,5
10	2796,34
11	1908,2
12	984,52

15a $u_0 = 20, u_1 = 26, u_2 = 32, u_3 = 38$ en $u_4 = 44$. (TABLE)

15b $a = 20$ en $b = 6$.

15c $u_n = 20 + 6n \Rightarrow u_{25} = 20 + 6 \cdot 25 = 170$.

n	u(n)
0	20
1	26
2	32
3	38
4	44
5	50
6	56

16a Het verschil van twee opeenvolgende termen is steeds $+5 \Rightarrow$ een rekenkundige rij.

16b Recursieve formule: $u_n = u_{n-1} + 5$ met $u_0 = 13$ en directe formule: $u_n = 13 + 5 \cdot n$ voor $n \geq 0$.

16c De vijftigste term is $u_{49} = 13 + 5 \cdot 49 = 258$.

16d $u_n = 633 \Rightarrow 13 + 5 \cdot n = 633 \Rightarrow 5 \cdot n = 620 \Rightarrow n = 124$. Dus de 125^e term is 633.

13+5*49	258
633-13	620
Ans/5	124

17a Directe formule: $u_n = 1023 - 7 \cdot n$ voor $n \geq 0$.

$u_n = 246 \Rightarrow 1023 - 7 \cdot n = 246 \Rightarrow -7 \cdot n = -777 \Rightarrow n = 111 \Rightarrow$ de 112^e term is 246.

17b $u_n < 0 \Rightarrow 1023 - 7 \cdot n < 0 \Rightarrow -7 \cdot n < -1023 \Rightarrow n > 146,1... \Rightarrow$ de eerste 147 term zijn positief.

246-1023	-777
Ans/-7	111
-1023/-7	146.1428571

18a Als je deze getallen twee keer bij elkaar optelt krijg je $100 \cdot 101 \Rightarrow 1 + 2 + 3 + \dots + 100 = \frac{1}{2} \cdot 100 \cdot 101$.

18b $1 + 2 + 3 + \dots + 50 = \frac{1}{2} \cdot 50 \cdot 51 = 1275$.

19a rr met $u_0 = 3 \cdot 0 + 4 = 4$ en $u_{50} = 3 \cdot 50 + 4 = 154$. $\sum_{k=0}^{50} (3k + 4) = \frac{1}{2} \cdot 51 \cdot (4 + 154) = 4029$.

3*50+4	154
1/2*51*(4+154)	4029

19b rr met $u_0 = 100 - 2 \cdot 0 = 100$ en $u_{40} = 100 - 2 \cdot 40 = 20$. $\sum_{k=0}^{40} (100 - 2k) = \frac{1}{2} \cdot 41 \cdot (100 + 20) = 2460$.

100-2*40	20
1/2*41*(100+20)	2460

19c rr met $u_5 = 6 \cdot 5 - 12 = 18$ en $u_{30} = 6 \cdot 30 - 12 = 168$. $\sum_{k=5}^{30} (6k - 12) = \frac{1}{2} \cdot 26 \cdot (18 + 168) = 2418$.

6*5-12	18
6*30-12	168
1/2*26*(18+168)	2418

19d rr met $u_{12} = 150 - 3 \cdot 12 = 114$ en $u_{36} = 150 - 3 \cdot 36 = 42$. $\sum_{k=12}^{36} (150 - 3k) = \frac{1}{2} \cdot 25 \cdot (114 + 42) = 1950$.

150-3*12	114
150-3*36	42
1/2*25*(114+42)	1950

20a rr met $u_0 = 12$ en $v = 4 \Rightarrow u_n = 12 + 4 \cdot n$.

$u_n = 12 + 4 \cdot n = 152 \Rightarrow 4 \cdot n = 140 \Rightarrow n = 35$.

$12 + 16 + 20 + 24 + \dots + 152 = \frac{1}{2} \cdot 36 \cdot (12 + 152) = 2952$.

152-12	140
Ans/4	35
1/2*36*(12+152)	2952

20b rr met $u_0 = 100$ en $v = -3 \Rightarrow u_n = 100 - 3 \cdot n$.

$u_n = 100 - 3 \cdot n > 0 \Rightarrow -3 \cdot n > -100 \Rightarrow n > 33,3...$

$u_{33} = 100 - 3 \cdot 33 = 1 \Rightarrow 100 + 97 + 94 + \dots + 1 = \frac{1}{2} \cdot 34 \cdot (100 + 1) = 1717$.

-100/-3	33.33333333
100-3*33	1
1/2*34*(100+1)	1717

20c rr met $u_0 = 18$ en $v = 7 \Rightarrow$ directe formule: $u_n = 18 + 7n$.

25^e term is $u_{24} = 18 + 7 \cdot 24 = 186 \Rightarrow \sum_{k=0}^{24} (18 + 7k) = \frac{1}{2} \cdot 25 \cdot (18 + 186) = 2550$.

18+7*24	186
1/2*25*(18+186)	2550

21a rr met $u_0 = 30,62$ en $v = 0,15 \Rightarrow u_n = 30,62 + 0,15 \cdot n$.
Het laatste rondje duurt $u_{24} = 30,62 + 0,15 \cdot 24 = 34,22$ sec.
De eindtijd van Carl is $\frac{1}{2} \cdot 25 \cdot (30,62 + 34,22) = 810,50$ sec. Dit is 13 minuten en 30,50 sec.

```
30.62+0.15*24
1/2*25*(30.62+34.22)
Ans/60
13.50833333
(Ans-13)*60
```

21b rr met $u_0 = 35,76$ en $v = -0,22 \Rightarrow u_n = 35,76 - 0,22 \cdot n$.
Het laatste rondje duurt $u_{24} = 35,76 - 0,22 \cdot 24 = 30,48$ sec.
De eindtijd van Sven is $\frac{1}{2} \cdot 25 \cdot (35,76 + 30,48) = 828$ sec. Dit is 13 minuten en 48 sec.

```
35.76-0.22*24
1/2*25*(35.76+30.48)
Ans/60
13.8
0.8*60
```

22a rr met $u_0 = 20$ en $v = \dots \Rightarrow u_n = 20 + v \cdot n \Rightarrow$ de 30^e term is $u_{29} = 20 + v \cdot 29$.
De som is dus $\frac{1}{2} \cdot 30 \cdot (20 + 20 + 29v) = 15 \cdot (40 + 29v) = 2340$.

```
2340/15
Ans-40
Ans/29
4
```

22b $15 \cdot (40 + 29v) = 2340 \Rightarrow 40 + 29v = 156 \Rightarrow 29v = 116 \Rightarrow v = 4$.

22c $u_0 = 20$ en de 50^e term is $u_{49} = 20 + 4 \cdot 49 = 216$. De som is $\frac{1}{2} \cdot 50 \cdot (20 + 216) = 5900$.

```
28+4*49
1/2*50*(20+216)
5900
```

23 De afstanden per seconde vormen een rr met $u_0 = 4$ en $v = \dots \Rightarrow$ de 12^e term is $u_{11} = 4 + v \cdot 11$.
De afstand na 12 seconden is $\frac{1}{2} \cdot 12 \cdot (4 + 4 + 11v) = 6 \cdot (8 + 11v) = 147$.
 $6 \cdot (8 + 11v) = 147 \Rightarrow 8 + 11v = 24,5 \Rightarrow 11v = 16,5 \Rightarrow v = 1,5$.
8^e term (de afstand in de 7^e seconde) is $u_7 = 4 + 1,5 \cdot 7 = 14,5$ m. De afstand na 8 seconden is $\frac{1}{2} \cdot 8 \cdot (4 + 14,5) = 74$ m.

```
147/6
Ans-8
1/2*8*(4+14.5)
```

24a De valafstanden per seconde vormen een rr met (valafstand in 1^e seconde) $u_0 = 4,9$ en (verschil) $v = 9,8$.
De valafstand in de 6^e seconde is $u_5 = 4,9 + 9,8 \cdot 5 = 53,9$.
De valafstand na 6 seconden is $\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot (4,9 + 53,9) = 176,4$ m.

```
4.9+9.8*5
1/2*6*(4.9+53.9)
176.4
```

24b $u_n = 4,9 + 9,8 \cdot n$ voor $n \geq 0 \Rightarrow S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n = \frac{1}{2} \cdot (n+1) \cdot (4,9 + 4,9 + 9,8 \cdot n)$
 $= \frac{1}{2} \cdot (n+1) \cdot (9,8 + 9,8n) = 4,9n + 4,9n^2 + 4,9 + 4,9n = 4,9n^2 + 9,8n + 4,9$ voor $n \geq 0$.

24c $S_n = 4,9n^2 + 9,8n + 4,9 = 1960$ (algebraïsch of intersect of rijenscherm en TABLE) $\Rightarrow n = 19 \Rightarrow$ na 20 seconden.

$n^2 + 2n + 1 = 400$
 $n^2 + 2n - 399 = 0$
 $(n+21) \cdot (n-19) = 0$
 $n = -21$ (vold. niet) $\vee n = 19$.

n	u(n)	S(n)
14	1102.5	
15	1254.4	
16	1411.1	
17	1582.6	
18	1768.9	
19	1960	1960
20	2166	

25a $u_0 = 400, u_1 = 600, u_2 = 900, u_3 = 1350$ en $u_4 = 2025$. (TABLE)

25b $a = 400$ en $b = 1,5$.

```
u(n) = 1.5*u(n-1)
u(nMin) = 400
u(n) = 400*1.5^n
```

n	u(n)	S(n)
0	400	400
1	600	1000
2	900	2250
3	1350	4500
4	2025	8525
5	3037.5	15562.5
6	4556.25	29118.75

26a De factor tussen twee opeenvolgende termen is steeds $\frac{1500}{1250} = \frac{6}{5} = 1,2$.

26b recursieve formule: $u_n = u_{n-1} \cdot 1,2$ met $u_0 = 1250$.

directe formule: $u_n = 1250 \cdot 1,2^n$ voor $n \geq 0$.

26c $u_n > 15000$ (TABLE) $\Rightarrow n \geq 14 \Rightarrow$ vanaf de 15^e term.

```
u(n) = 1.2*u(n-1)
u(nMin) = 1250
```

n	u(n)
10	7787.7
11	9345.2
12	11214.3
13	13457.1
14	16148.6
15	19378.3
16	23254

27 mr: $u_n = u_0 \cdot r^n$ met $u_3 = 54$ en $u_{10} = 118098 \Rightarrow r^7 = \frac{u_{10}}{u_3} = \frac{118098}{54} = 2187 \Rightarrow r = 3$.

mr: $u_n = u_0 \cdot 3^n$ met $u_3 = 54 \Rightarrow 54 = u_0 \cdot 3^3 \Rightarrow u_0 = 2 \Rightarrow$ mr: $u_n = 2 \cdot 3^n$ voor $n \geq 0$.

```
118098/54
7*sqrt[3]Ans
54/3^3
```

28a rr: $u_n = u_0 + v \cdot n$ met $u_3 = 16$ en $u_8 = 16384 \Rightarrow 5v = 16384 - 16 = 16368 \Rightarrow v = 3273,6$.

rr: $u_n = u_0 + 3273,6 \cdot n$ met $u_3 = 16 \Rightarrow 16 = u_0 + 3273,6 \cdot 3 \Rightarrow u_0 = -9804,8$.

rr: $u_n = -9804,8 + 3273,6 \cdot n$ voor $n \geq 0$.

```
16384-16
Ans/5
16-Ans*3
```

28b mr: $u_n = u_0 \cdot r^n$ met $u_3 = 16$ en $u_8 = 16384 \Rightarrow r^5 = \frac{u_8}{u_3} = \frac{16384}{16} = 1024 \Rightarrow r = 4$.

mr: $u_n = u_0 \cdot 4^n$ met $u_3 = 16 \Rightarrow 16 = u_0 \cdot 4^3 \Rightarrow u_0 = \frac{1}{4} \Rightarrow$ mr: $u_n = \frac{1}{4} \cdot 4^n (= 4^{-1} \cdot 4^n = 4^{n-1})$ voor $n \geq 0$.

```
16384/16
5*sqrt[4]Ans
16/4^3
```

29 Een mr heeft te maken met een exponentiële groei en een rr met een lineaire groei.

```
4^2+8^2
80
```

30a Pythagoras in $\triangle APS$ ($\angle A = 90^\circ$): $AP^2 + AS^2 = PS^2 \Rightarrow 4^2 + 8^2 = PS^2 \Rightarrow 80 = PS^2 \Rightarrow PS = \sqrt{80} \Rightarrow r = \frac{PS}{AB} = \frac{\sqrt{80}}{12}$.

30b mr: $u_n = u_0 \cdot r^n$ met $u_0 = 12$ en $r = \frac{\sqrt{80}}{12} \Rightarrow u_n = 12 \cdot \left(\frac{\sqrt{80}}{12}\right)^n$ voor $n \geq 0$.

30c $u_n < 1$ (TABLE) $\Rightarrow n \geq 9 \Rightarrow$ vanaf het 10^e vierkant.

30d $v_n = (u_n)^2 \Rightarrow v_n = \left(12 \cdot \left(\frac{\sqrt{80}}{12}\right)^n\right)^2 = 144 \cdot \left(\frac{\sqrt{80}}{12}\right)^{2n} = 144 \cdot \left(\frac{80}{144}\right)^n = 144 \cdot \left(\frac{5}{9}\right)^n$ voor $n \geq 0$.

30e $1 \text{ mm}^2 = 0,01 \text{ cm}^2$. Dus $v_n < 0,01$ (TABLE) $\Rightarrow n \geq 17 \Rightarrow$ vanaf het 18^e vierkant.

31 $-2 \cdot S_n = 15 - 2657205 \Rightarrow S_n = \frac{15 - 2657205}{-2} = 1328595$.

32a $\sum_{k=0}^{11} (0,001 \cdot 2^k) = \frac{0,001 \cdot (1 - 2^{12})}{1 - 2} = 4,095$.

32b $\sum_{k=0}^{20} (100 \cdot 0,8^k) = \frac{100 \cdot (1 - 0,8^{21})}{1 - 0,8} \approx 495,39$.

32c $\sum_{k=5}^{18} (200 \cdot 1,1^k) = \frac{200 \cdot 1,1^5 \cdot (1 - 1,1^{14})}{1 - 1,1} \approx 9011$.

33a mr met $u_0 = 2000$ en $r = 1,5 \Rightarrow u_{n+1} = 34171,875 \cdot 1,5 = 51257,8125 \Rightarrow \text{som} = \frac{2000 - 51257,8125}{1 - 1,5} = 98515,625$.

33b mr met $u_0 = 1,06$ en $r = 1,06 \Rightarrow 1,06 + 1,06^2 + 1,06^3 + 1,06^4 + \dots + 1,06^{12} = \frac{1,06 - 1,06^{13}}{1 - 1,06} \approx 17,882$.

33c mr met $u_0 = 1$ en $r = 1,5 \Rightarrow 1 + 1,5 + 1,5^2 + 1,5^3 + \dots + 1,5^{20} = \frac{1 - 1,5^{21}}{1 - 1,5} \approx 9973,770$.

33d mr met $u_0 = 1,2$ en $r = -1,2 \Rightarrow 1,2 - 1,2^2 + 1,2^3 - 1,2^4 + \dots - 1,2^{24} = \frac{1 - 1,2^{25}}{1 - (-1,2)} \approx -42,816$.

34a $u_n = 20 \cdot 1,1^n$ voor $n \geq 0$.

34b $u_n > 42$ (TABLE) $\Rightarrow n \geq 8$. Dus voor het eerst bij de 9^e duurloop.

Hij heeft dan in totaal $\sum_{k=0}^8 (20 \cdot 1,1^k) = \frac{20 \cdot (1 - 1,1^9)}{1 - 1,1} \approx 272$ km afgelegd.

35 De omzet per jaar wordt gegeven door $u_n = 11,3 \cdot 1,074^n$ met $n = 0$ in 1995.

Bij 2007 hoort $n = 12 \Rightarrow$ totale omzet = $\sum_{k=0}^{12} (11,3 \cdot 1,074^k) = \frac{11,3 \cdot (1 - 1,074^{13})}{1 - 1,074} \approx 233,6$ miljard dollar.

36a $5,2 \cdot 0,8^7 \approx 1,1$ (cm) \Rightarrow de toename in de 8^e week is (ongeveer) 11 mm.

36b $5,2 + 5,2 \cdot 0,8 + 5,2 \cdot 0,8^2 + 5,2 \cdot 0,8^3 + \dots + 5,2 \cdot 0,8^7 = \frac{5,2 \cdot (1 - 0,8^8)}{1 - 0,8} \approx 21,6$ (cm).

De plant is in de eerste 8 weken (ongeveer) 216 mm gegroeid.

36c $5,2 + 5,2 \cdot 0,8 + 5,2 \cdot 0,8^2 + 5,2 \cdot 0,8^3 + \dots + 5,2 \cdot 0,8^9 = \frac{5,2 \cdot (1 - 0,8^{10})}{1 - 0,8} \approx 23,2$ (cm).

De hoogte van de plant na 10 weken is (ongeveer) $18 + 23,2 = 41,2$ cm.

37a rr $u_n = 100 + 15n$ voor $n \geq 0 \Rightarrow S_n = \sum_{k=0}^n (100 + 15k) = \frac{1}{2} \cdot (n+1) \cdot (100 + 100 + 15n) = \frac{1}{2} \cdot (n+1) \cdot (200 + 15n)$ voor $n \geq 0$.

mr $v_n = 10 \cdot 1,5^n$ voor $n \geq 0 \Rightarrow T_n = \sum_{k=0}^n (10 \cdot 1,5^k) = \frac{10 \cdot (1 - 1,5^{n+1})}{1 - 1,5} = \frac{10 - 10 \cdot 1,5^{n+1}}{-0,5} = -20 + 20 \cdot 1,5^{n+1}$ voor $n \geq 0$.

37b $T_n > S_n$ (TABLE) $\Rightarrow n \geq 11$.

38 Bij deze situatie horen de formules:

$K_n = 1,038 \cdot K_{n-1} - 150$ met $K_0 = 5000$ en $K_n - K_{n-1} = 0,038 \cdot K_{n-1} - 150$ met $K_0 = 5000$.
($K_n = 1,038 \cdot K_{n-1} - 150 \Rightarrow K_n = 1 \cdot K_{n-1} + 0,038 \cdot K_{n-1} - 150 \Rightarrow K_n - K_{n-1} = 0,038 \cdot K_{n-1} - 150$)

n	u(n)	v(n)
0	12	144
1	8,9443	80
2	6,6667	44,4444
3	4,968	24,691
4	3,7037	13,717
5	2,7606	7,6208
6	2,0576	4,2338

n	u(n)	v(n)
12	35281	12448
13	52697	27818
14	78601	61842
15	11641	13434
16	17089	29186
17	25116	63093
18	36605	134407

n	u(n)	v(n)
6	2,0576	4,2338
7	1,5337	2,3521
8	1,1434	1,3067
9	0,8530	0,7256
10	0,6307	0,4031
11	0,4738	0,2246
12	0,3528	0,1244

n	u(n)	v(n)
0	0,001	0,0001
1	0,002	0,0004
2	0,004	0,0016
3	0,008	0,0064
4	0,016	0,0256
5	0,032	0,1024
6	0,064	0,4096
7	0,128	1,6384
8	0,256	6,5536
9	0,512	26,3168
10	1,024	104,8576
11	2,048	417,4336
12	4,096	1669,7376

n	u(n)	v(n)
5	200	40000
6	220	48400
7	242	58324
8	266	71236
9	292	86144
10	320	103040
11	350	122500
12	382	145044
13	416	173824
14	452	206936
15	490	245400
16	530	289240
17	572	338576
18	616	394440

n	u(n)
0	20
1	22
2	24,2
3	26,62
4	29,282
5	32,2082
6	35,4290
7	39,0119
8	42,9151
9	47,2016
10	51,8718
11	56,9595
12	62,4694

n	u(n)	v(n)
0	11,3	127,69
1	12,112	146,67
2	12,952	168,61
3	13,824	193,75
4	14,735	222,34
5	15,684	253,74
6	16,671	288,21
7	17,696	326,04
8	18,759	367,61
9	19,861	412,31
10	21,002	460,53
11	22,183	511,71
12	23,405	566,31

n	u(n)	v(n)
0	5,2	27,04
1	4,36	18,99
2	3,568	12,72
3	2,8544	8,15
4	2,2835	5,21
5	1,8268	3,33
6	1,4614	2,14
7	1,1691	1,36
8	0,9353	0,87
9	0,7482	0,56
10	0,5986	0,35
11	0,4789	0,23
12	0,3831	0,15

n	u(n)	v(n)
0	5,2	27,04
1	4,36	18,99
2	3,568	12,72
3	2,8544	8,15
4	2,2835	5,21
5	1,8268	3,33
6	1,4614	2,14
7	1,1691	1,36
8	0,9353	0,87
9	0,7482	0,56
10	0,5986	0,35
11	0,4789	0,23
12	0,3831	0,15

n	u(n)	v(n)
0	1015	321,72
1	1220	482,58
2	1440	748,87
3	1675	1133,3
4	1935	1740
5	2210	2574,9
6	2490	3762,4

*** **Neem GR-practicum 7A door.** (zie aan het eind van deze uitwerkingen)

n	u(n)	v(n)
0	1015	321,72
1	1220	482,58
2	1440	748,87
3	1675	1133,3
4	1935	1740
5	2210	2574,9
6	2490	3762,4

39 39a, 39c, 39e en 39f zijn lineaire differentievergelijkingen van de eerste orde.

40a Zie de schermen hiernaast. u_n nadert tot $26\frac{2}{3}$.

40b Bij een andere startwaarde nadert u_n ook tot $26\frac{2}{3}$.

41a $b = 2$ geeft grenswaarde 5; $b = 20$ geeft grenswaarde 50 en $b = 5$ geeft grenswaarde 12,5.

41b Bij $b = 2$ is de tijdgrafiek dalend. Bij $b = 20$ en $b = 5$ is de tijdgrafiek stijgend.

42a u_n nadert tot $9,375 \approx 9,4$.

42b De stippen van de tijdgrafiek liggen om en om boven en onder de grenswaarde.

43a u_n nadert niet tot een grenswaarde.

43b De termen van u_n zijn om en om positief en negatief. De positieve termen worden steeds groter en de negatieve termen steeds kleiner.

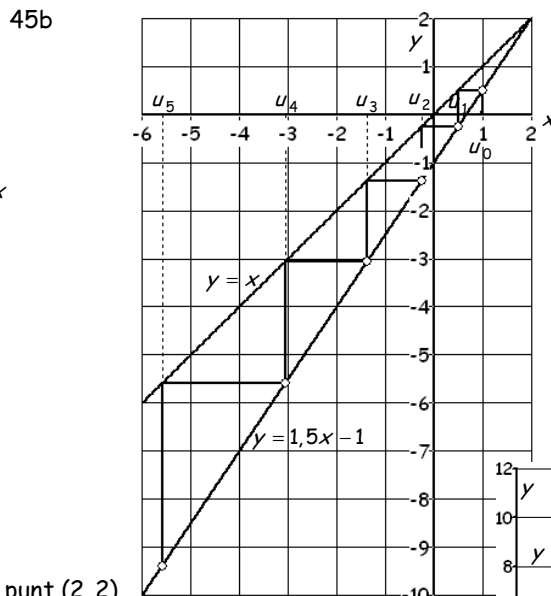
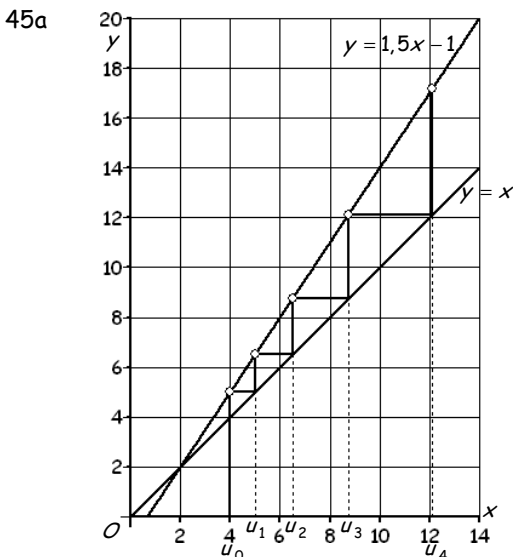
44a Zie de tabel hiernaast.

44b Uit de 3^e kolom volgt $(7; 11,5)$,
uit de 4^e kolom volgt $(11,5; 18,25)$.

44c Alle punten liggen op de lijn $y = 1,5x + 1$.

44d Je moet u_n in $u_n = 1,5u_{n-1} + 1$ vervangen door y en u_{n-1} door x .

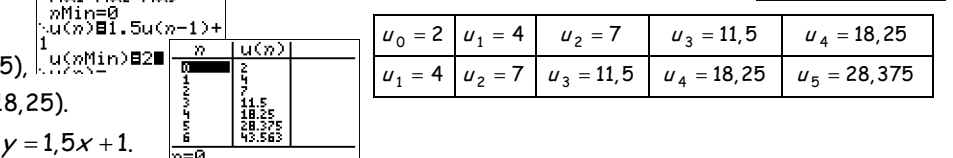
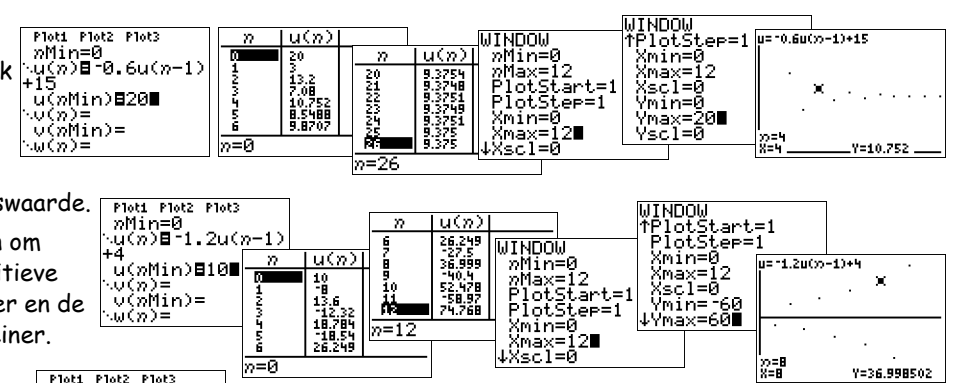
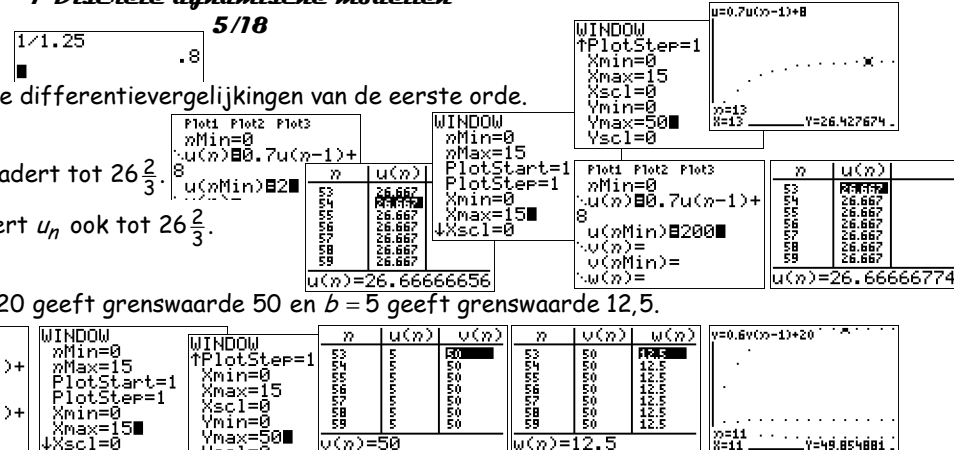
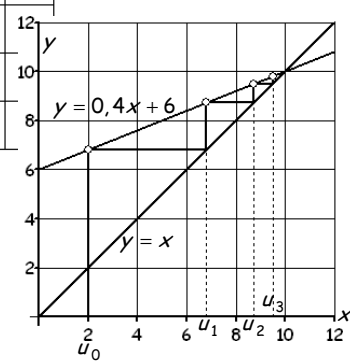
44e Ja, want als je u_n door y en u_{n-1} door x vervangt, krijg je steeds $y = 1,5x + 1$.



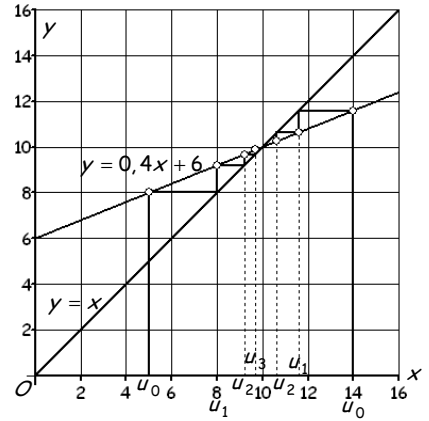
45c De webgrafiek bestaat enkel uit het punt $(2, 2)$.
De rij u_n is de constante rij $u_n = 2$ (voor elke n).

46a Zie de webgrafiek hiernaast.

46b De lijnstukken komen steeds dichterbij elkaar te liggen en naderen het snijpunt van $y = x$ en $y = 0,4x + 6$.



$u_0 = 2$	$u_1 = 4$	$u_2 = 7$	$u_3 = 11,5$	$u_4 = 18,25$
$u_1 = 4$	$u_2 = 7$	$u_3 = 11,5$	$u_4 = 18,25$	$u_5 = 28,375$



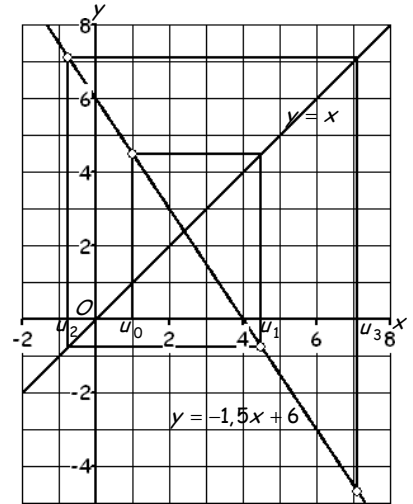
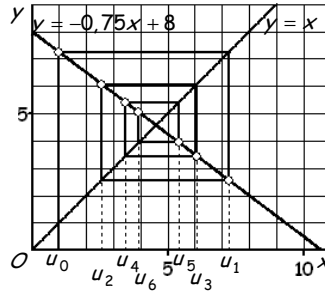
46c $x = 0,4x + 6$
 $0,6x = 6$
 $x = 10.$

De grenswaarde is 10.

46de Zie de webgrafiek hiernaast.
 De grenswaarde is 10 vanwege dezelfde reden als bij 46b.

46f Voor $u_n < 10$ gaan de lijnstukjes van de webgrafiek stijgend naar (10,10) en voor $u_n > 10$ dalend naar (10,10).
 Voor $u_n = 10$ krijg je de constante rij $u_0 = 10, u_1 = 10, u_2 = 10, \dots$
 Dus voor elke u_n is de grenswaarde gelijk aan 10.

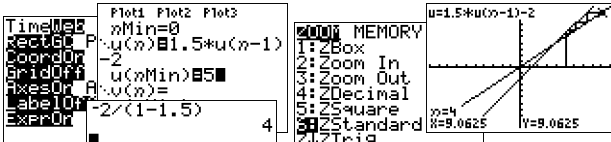
47a $u_n = -0,75 \cdot u_{n-1} + 8$ met $u_0 = 1.$
 47b Maak in je werkboek de webgrafiek hiernaast.
 47c $x = -0,75x + 8$
 $1,75x = 8$
 $x = 4 \frac{4}{7}.$



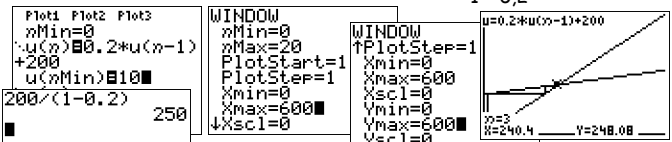
48a De differentievergelijking $u_n = -1,5 \cdot u_{n-1} + 6$ met $u_0 = 1.$
 48b Maak in je werkboek de webgrafiek hiernaast.
 48c Nee, de punten komen steeds verder van het snijpunt van de lijnen $y = -1,5x + 6$ en $y = x$ af te liggen.
 48d De webgrafiek bestaat uitsluitend uit het punt (2, 2; 2, 2), want dit is het snijpunt van de lijnen $y = -1,5x + 6$ en $y = x.$

*** **Neem GR-practicum 7B door.** (zie aan het eind van deze uitwerkingen)

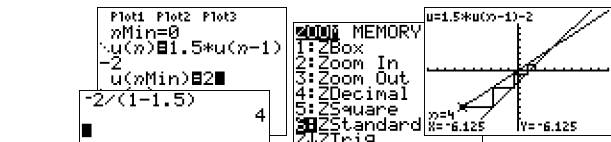
49a Er treedt geen convergentie op.



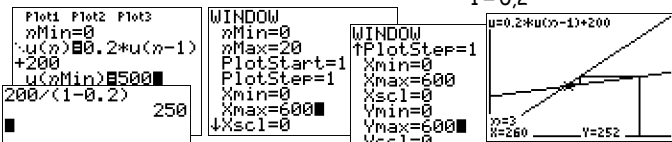
49d Er treedt convergentie op. $\bar{u} = \frac{200}{1-0,2} = 250.$



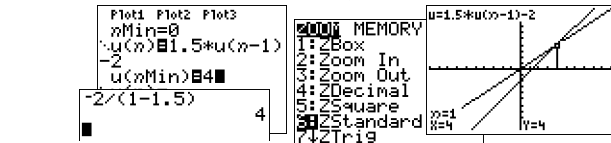
49b Er treedt geen convergentie op.



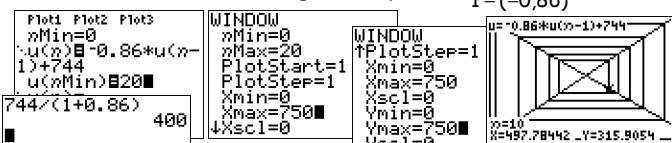
49e Er treedt convergentie op. $\bar{u} = \frac{200}{1-0,2} = 250.$



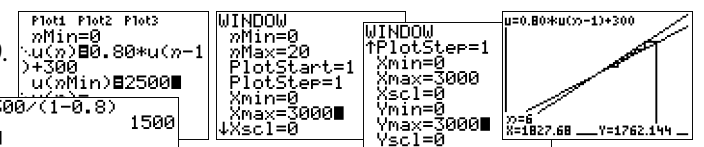
49c De startwaarde is gelijk aan de grenswaarde 4.



49f Er treedt convergentie op. $\bar{u} = \frac{744}{1-(-0,86)} = 400.$



50a De groeifactor per jaar is $1 - 0,2 = 0,8.$
 Je krijgt: $A_n = 0,8 \cdot A_{n-1} + 300$ met $A_0 = 2500.$



50b De rij A_n convergeert (zie de webgrafiek).

50c $\bar{A} = \frac{300}{1-0,8} = 1500$ (dennenbomen).

51a Je kunt in de webgrafiek bij elke n de waarde van u_n aflezen op de lijn $y = ax + b.$
 In de tijdgrafiek zijn deze punten (n, u_n) ook getekend.

51b Oefen hier in het werkboek zelf mee. (bestudeer voor de aanpak eerst goed figuur 7.13 in het boek)

- 52a $rr \Rightarrow$ het verschil tussen de opeenvolgende termen is constant $\Rightarrow a = 1$. (voor b zijn er geen voorwaarden)
52b $mr \Rightarrow$ het quotiënt van twee opeenvolgende termen is constant $\Rightarrow b = 0$ en $a \neq 0$.

- 53a $u_n = 1,05 \cdot u_{n-1} + 500$ met $u_0 = 750$. 53b $u_3 = 1,05^3 \cdot 750 + 1,05^2 \cdot 500 + 1,05 \cdot 500 + 500$.
53c $u_6 = 1,05^6 \cdot 750 + 1,05^5 \cdot 500 + 1,05^4 \cdot 500 + 1,05^3 \cdot 500 + 1,05^2 \cdot 500 + 1,05 \cdot 500 + 500$.
53d factor = 1,05 en beginterm = 500.

- 54a Directe formule: $u_n = \bar{u} + a^n \cdot (u_0 - \bar{u})$ met $\bar{u} = \frac{b}{1-a} = \frac{-5}{1-1,5} = \frac{-5}{-0,5} = 10$.
Dus $u_n = 10 + 1,5^n \cdot (30 - 10) = 10 + 20 \cdot 1,5^n$ voor $n \geq 0$.

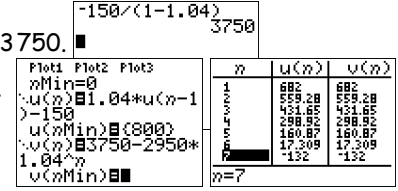
- 54b Directe formule: $x_n = \bar{x} + a^n \cdot (x_0 - \bar{x})$ met $\bar{x} = \frac{b}{1-a} = \frac{20}{1-0,75} = \frac{20}{0,25} = 80$.
Dus $x_n = 80 + 0,75^n \cdot (100 - 80) = 80 + 20 \cdot 0,75^n$ voor $n \geq 0$.

- 54c Directe formule: $K_n = \bar{K} + a^n \cdot (K_0 - \bar{K})$ met $\bar{K} = \frac{b}{1-a} = \frac{-200}{1-1,05} = \frac{-200}{-0,05} = 4000$.
Dus $K_n = 4000 + 1,05^n \cdot (1000 - 4000) = 4000 - 3000 \cdot 1,05^n$ voor $n \geq 0$.

- 55a Differentiaalvergelijking: $K_n = 1,04 \cdot K_{n-1} - 150$ met $K_0 = 800$.

- 55b Directe formule: $K_n = \bar{K} + a^n \cdot (K_0 - \bar{K})$ met $\bar{K} = \frac{b}{1-a} = \frac{-150}{1-1,04} = \frac{-150}{-0,04} = 3750$.
Dus $K_n = 3750 + 1,04^n \cdot (800 - 3750) = 3750 - 2950 \cdot 1,04^n$ voor $n \geq 0$.

- 55c $K_n < 0$ (TABLE) $\Rightarrow n \geq 7$ (bij beide formules) \Rightarrow voor het eerst op 1-1-2013.
Ze kan op 1-1-2013 wel nog 150 - 132 = 18 euro opnemen.

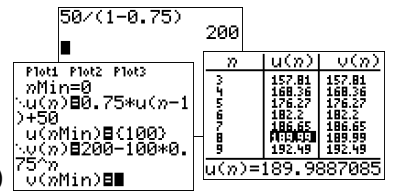


- 56a Differentiaalvergelijking: $A_n = 0,75 \cdot A_{n-1} + 50$ met $A_0 = 100$.

- 56b Directe formule: $A_n = \bar{A} + a^n \cdot (A_0 - \bar{A})$ met $\bar{A} = \frac{b}{1-a} = \frac{50}{1-0,75} = \frac{50}{0,25} = 200$.
Dus $A_n = 200 + 0,75^n \cdot (100 - 200) = 200 - 100 \cdot 0,75^n$ voor $n \geq 0$.

- 56c Na 32 uur is $n = 8 \Rightarrow A_8 = 200 - 100 \cdot 0,75^8 \approx 190$ (mg).

- 56d Ja, $\bar{A} = 200$. (want A_8 ligt dicht bij \bar{A} dan A_0 , of bekijk een webgrafiek)

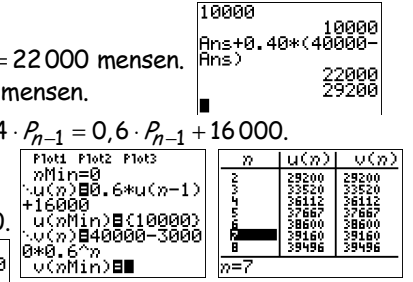


- 57a Om 7:00 uur 10000 mensen. Om 7:30 uur $10000 + 0,40 \cdot (40000 - 10000) = 22000$ mensen.
Om 8:00 uur $22000 + 0,40 \cdot (40000 - 22000) = 29200$ mensen. Dus 29200 mensen.

- 57b Differentiaalvergelijking: $P_n = P_{n-1} + 0,4 \cdot (40000 - P_{n-1}) = P_{n-1} + 16000 - 0,4 \cdot P_{n-1} = 0,6 \cdot P_{n-1} + 16000$.

- 57c Directe formule: $P_n = \bar{P} + a^n \cdot (P_0 - \bar{P})$ met $\bar{P} = \frac{b}{1-a} = \frac{16000}{1-0,6} = \frac{16000}{0,4} = 40000$.
Dus $P_n = 40000 + 0,6^n \cdot (10000 - 40000) = 40000 - 30000 \cdot 0,6^n$ voor $n \geq 0$.

- 57d $P_n > 39000$ (TABLE) $\Rightarrow n \geq 7 \Rightarrow$ voor het eerst voor $n = 7$.

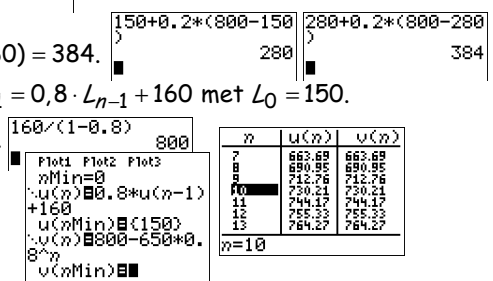


- 58a $L_0 = 150$; $L_1 = 150 + 0,2 \cdot (800 - 150) = 280$ en $L_2 = 280 + 0,2 \cdot (800 - 280) = 384$.

- 58b $L_n = L_{n-1} + 0,2 \cdot (800 - L_{n-1})$ met $L_0 = 150$ of $L_n = L_{n-1} + 160 - 0,2 \cdot L_{n-1} = 0,8 \cdot L_{n-1} + 160$ met $L_0 = 150$.

- 58c Directe formule: $L_n = \bar{L} + a^n \cdot (L_0 - \bar{L})$ met $\bar{L} = \frac{b}{1-a} = \frac{160}{1-0,8} = \frac{160}{0,2} = 800$.
Dus $L_n = 800 + 0,8^n \cdot (150 - 800) = 800 - 650 \cdot 0,8^n$ voor $n \geq 0$.

- 58d $L_n > 0,9 \cdot 800 = 720$ (TABLE) $\Rightarrow n \geq 10 \Rightarrow$ na 11 dagen is 90% geringd.



- 59a De hazenpopulatie zal toenemen omdat er weinig lynxen zijn die op de hazen jagen.
De lynxenpopulatie zal toenemen omdat er veel hazen zijn die als voedsel dienen.

- 59b De hazenpopulatie zal afnemen en de lynxenpopulatie zal afnemen.

- 59c Uitgaande van (startend met) weinig lynxen en weinig hazen:
toename aantal hazen \Rightarrow toename aantal lynxen \Rightarrow afname aantal hazen \Rightarrow afname aantal lynxen, enzovoort.

- 59d Bij beide populaties is de periode 8 jaar. 59e Op $t = 1$ is $H = 10000$ en $L = 4600$.

- 59f • Hoogste punten in de hazengrafiek (fig. 7.15) bepalen het meest rechtse punt in het prooi-roofdierdiagram (7.16).
• Laagste punten in de lynxengrafiek (fig. 7.15) bepalen het laagste punt in het prooi-roofdierdiagram (fig. 7.16).

60a Op $t = 1$ zijn er 1025 prooidieren en 152 roofdieren.
Op $t = 5$ zijn er 1104 prooidieren en 159 roofdieren.
(zie de schermen hiernaast)

n	u(n)	v(n)
0	1000	150
1	1025	151,5
2	1048,2	152,17
3	1068,8	152,89
4	1086,3	153,60
5	1104,1	154,31
6	1116,6	155,02

60b Na 25 maanden is het aantal roofdieren maximaal.
Er zijn dan 196 roofdieren. (blader door de tabel)

n	u(n)	v(n)
22	822,47	194,64
23	787,89	195,21
24	754,22	195,78
25	721,6	196,35
26	690,28	196,92
27	660,68	197,49
28	632,78	198,06

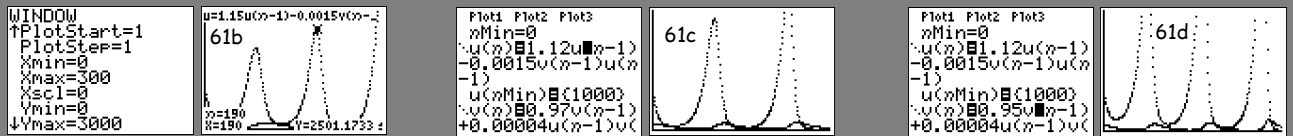
60c 25 jaar zijn $25 \cdot 12 = 300$ maanden.
De populatie bereikt vier keer een maximum.
(bekijk een tijdgrafiek over 300 maanden)

n	u(n)	v(n)
0	1000	150
1	925	151,5
2	853,54	152,56
3	786,25	153,49
4	723,82	154,26
5	665,95	154,91
6	612,38	155,33

61a Op $t = 5$ zijn er 666 prooidieren en 153 roofdieren.
Op $t = 15$ zijn er 317 prooidieren en 137 roofdieren.
(zie de schermen hiernaast)

n	u(n)	v(n)
10	444,86	147,77
11	412,99	148,96
12	384,52	149,99
13	359,19	150,89
14	336,57	151,67
15	316,55	152,36
16	298,81	152,98

61b Uit de tijdgrafiek blijkt dat na 190 maanden de populatie prooidieren voor de tweede keer maximaal is.
Het maximale aantal is 2501. (het gaat ontzettend traag, de GR loopt voor geen meter)



61c Na het plotten van de tijdgrafiek blijkt dat de eerste bewering niet waar is (de maximale waarden nemen juist toe) en dat de tweede bewering ook niet waar is (de toppen liggen verder uit elkaar).

61d Deze bewering is ook niet waar.

62a $\Delta P = 0 \Rightarrow (0,25 - 0,0015\bar{R}) \cdot \bar{P} = 0 \Rightarrow 0,25 - 0,0015\bar{R} = 0 \Rightarrow -0,0015\bar{R} = -0,25 \Rightarrow \bar{R} \approx 167.$

$$\frac{0,25}{0,0015} = 166,6666667$$

$$\frac{0,03}{0,00004} = 750$$

$\Delta R = 0 \Rightarrow (-0,03 + 0,00004\bar{P}) \cdot \bar{R} = 0 \Rightarrow -0,03 + 0,00004\bar{P} = 0 \Rightarrow 0,00004\bar{P} = 0,03 \Rightarrow \bar{P} = 750.$

62b De populaties veranderen dan niet meer, dus steeds (voor elke $t \geq 0$) is $P_t = 750$ en $R_t = 167.$

63a $P_t = 1,15 \cdot P_{t-1} - 0,006 \cdot R_{t-1} \cdot P_{t-1}$
 $R_t = 0,94 \cdot R_{t-1} + 0,00006 \cdot P_{t-1} \cdot R_{t-1}$
met $P_0 = 800$ en $R_0 = 20$

of $P_t = P_{t-1} + \Delta P$ met $\Delta P = (0,15 - 0,006R_{t-1}) \cdot P_{t-1}$
 $R_t = R_{t-1} + \Delta R$ met $\Delta R = (-0,06 + 0,00006P_{t-1}) \cdot R_{t-1}$
met $P_0 = 800$ en $R_0 = 20$

In de evenwichtssituatie is $P_t = P_{t-1} = \bar{P}$ en $R_t = R_{t-1} = \bar{R} \Rightarrow \Delta P = 0$ en $\Delta R = 0.$

$\Delta P = 0 \Rightarrow (0,15 - 0,006\bar{R}) \cdot \bar{P} = 0 \Rightarrow 0,15 - 0,006\bar{R} = 0 \Rightarrow -0,006\bar{R} = -0,15 \Rightarrow \bar{R} = 25.$

$$\frac{0,15}{0,006} = 25$$

$$\frac{0,06}{0,00006} = 1000$$

$\Delta R = 0 \Rightarrow (-0,06 + 0,00006\bar{P}) \cdot \bar{R} = 0 \Rightarrow -0,06 + 0,00006\bar{P} = 0 \Rightarrow 0,00006\bar{P} = 0,06 \Rightarrow \bar{P} = 1000.$

63b $P_t = 1,25 \cdot P_{t-1} - 0,006 \cdot R_{t-1} \cdot P_{t-1}$ of $P_t = P_{t-1} + \Delta P$ met $\Delta P = (0,25 - 0,006R_{t-1}) \cdot P_{t-1}.$

In de evenwichtssituatie is $\Delta P = 0$ en $\Delta R = 0$ (zie 63a $\Rightarrow \bar{P} = 1000$).

$\Delta P = 0 \Rightarrow (0,25 - 0,006\bar{R}) \cdot \bar{P} = 0 \Rightarrow 0,25 - 0,006\bar{R} = 0 \Rightarrow -0,006\bar{R} = -0,25 \Rightarrow \bar{R} \approx 42.$

$$\frac{0,25}{0,006} = 41,6666667$$

Dus als de vruchtbaarheid van de prooidieren toeneemt, neemt \bar{R} toe en blijft \bar{P} gelijk.

63c Stel dat de natuurlijke sterfte van de roofdieren zo toeneemt, dat de groeivoet $-0,09$ wordt.

$R_t = 0,91 \cdot R_{t-1} + 0,00006 \cdot P_{t-1} \cdot R_{t-1}$ of $R_t = R_{t-1} + \Delta R$ met $\Delta R = (-0,09 + 0,00006P_{t-1}) \cdot R_{t-1}.$

In de evenwichtssituatie is $\Delta P = 0$ (zie 63a $\Rightarrow \bar{R} = 25$) en $\Delta R = 0.$

$\Delta R = 0 \Rightarrow (-0,09 + 0,00006\bar{P}) \cdot \bar{R} = 0 \Rightarrow -0,09 + 0,00006\bar{P} = 0 \Rightarrow 0,00006\bar{P} = 0,09 \Rightarrow \bar{P} = 1500.$

$$\frac{0,09}{0,00006} = 1500$$

Dus als de natuurlijke sterfte van de roofdieren toeneemt, neemt \bar{P} toe en blijft \bar{R} gelijk.

64a $P_t = 1,38 \cdot P_{t-1} + a \cdot R_{t-1} \cdot P_{t-1}$ verder is gegeven: $P_1 = 539$ en $R_1 = 202 \Rightarrow$
 $R_t = 0,90 \cdot R_{t-1} + b \cdot P_{t-1} \cdot R_{t-1}$ $539 = 1,38 \cdot 550 + a \cdot 200 \cdot 550 \Rightarrow a = -0,002$ en
met $P_0 = 550$ en $R_0 = 200$ $202 = 0,90 \cdot 200 + b \cdot 550 \cdot 200 \Rightarrow b = 0,0002.$

$$\frac{539 - 1,38 \cdot 550}{200 \cdot 550} = -0,002$$

$$\frac{202 - 0,90 \cdot 200}{550 \cdot 200} = 0,0002$$

64b Voer de rijen nu in op de GR.
Blader vervolgens door TABLE.
Na 4 maanden is het aantal roofdieren voor het eerst maximaal met $R_{\max} \approx 205.$

n	u(n)	v(n)
0	550	200
1	539	202
2	526,06	203,58
3	511,78	205,04
4	496,8	206,4
5	481,78	207,59
6	467,34	208,24

64c $P_t = 1,38 \cdot P_{t-1} - 0,002 \cdot R_{t-1} \cdot P_{t-1}$
 $R_t = 0,90 \cdot R_{t-1} + 0,0002 \cdot P_{t-1} \cdot R_{t-1}$
met $P_0 = 550$ en $R_0 = 200$

of $P_t = P_{t-1} + \Delta P$ met $\Delta P = (0,38 - 0,002R_{t-1}) \cdot P_{t-1}$
 $R_t = R_{t-1} + \Delta R$ met $\Delta R = (-0,10 + 0,0002P_{t-1}) \cdot R_{t-1}$
met $P_0 = 550$ en $R_0 = 200$

$\Delta P = 0 \Rightarrow (0,38 - 0,002\bar{R}) \cdot \bar{P} = 0 \Rightarrow 0,38 - 0,002\bar{R} = 0 \Rightarrow -0,002\bar{R} = -0,38 \Rightarrow \bar{R} = 190.$

$$\frac{0,38}{0,002} = 190$$

$\Delta R = 0 \Rightarrow (-0,10 + 0,0002\bar{P}) \cdot \bar{R} = 0 \Rightarrow -0,10 + 0,0002\bar{P} = 0 \Rightarrow 0,0002\bar{P} = 0,10 \Rightarrow \bar{P} = 500.$

$$\frac{0,10}{0,0002} = 500$$

64d Ga na dat: Als de vruchtbaarheid van de prooidieren toeneemt, neemt \bar{R} toe en blijft \bar{P} gelijk. (zie ook 63b)

65
$$\begin{cases} P_t = 1,18 \cdot P_{t-1} + a \cdot R_{t-1} \cdot P_{t-1} \\ R_t = 0,92 \cdot R_{t-1} + b \cdot P_{t-1} \cdot R_{t-1} \end{cases}$$
 of
$$\begin{cases} P_t = P_{t-1} + \Delta P \text{ met } \Delta P = (0,18 + a \cdot R_{t-1}) \cdot P_{t-1} \\ R_t = R_{t-1} + \Delta R \text{ met } \Delta R = (-0,08 + b \cdot P_{t-1}) \cdot R_{t-1} \end{cases}$$
 met beginwaarden P_0 en R_0

$\Delta P = 0 \Rightarrow (0,18 + a \cdot \bar{R}) \cdot \bar{P} = 0 \Rightarrow 0,18 + a \cdot \bar{R} = 0 \Rightarrow a \cdot \bar{R} = -0,18 \Rightarrow \bar{R} = \frac{-0,18}{a} = 800$ (gegeven) $\Rightarrow a = -0,000225$.

$\Delta R = 0 \Rightarrow (-0,08 + b \cdot \bar{P}) \cdot \bar{R} = 0 \Rightarrow -0,08 + b \cdot \bar{P} = 0 \Rightarrow b \cdot \bar{P} = 0,08 \Rightarrow \bar{P} = \frac{0,08}{b} = 5000$ (gegeven) $\Rightarrow b = 0,000016$.

-0,18/800
0,08/5000
-2,25E-4
1,6E-5

66a Als de prooi- en roofdieren elkaar niet beïnvloeden, dan neemt het aantal roofdieren af $\Rightarrow 0 < c < 1$.

66b Als de prooi- en roofdieren elkaar niet beïnvloeden, dan neemt het aantal prooidieren toe $\Rightarrow a > 1$.
Als de prooi- en roofdieren elkaar wel beïnvloeden, dan zal P_t kleiner zijn dan $a \cdot P_{t-1} \Rightarrow b < 0$ en zal R_t groter zijn dan $c \cdot R_{t-1} \Rightarrow d > 0$.

66c
$$\begin{cases} P_t = a \cdot P_{t-1} + b \cdot R_{t-1} \cdot P_{t-1} \\ R_t = c \cdot R_{t-1} + d \cdot P_{t-1} \cdot R_{t-1} \end{cases}$$
 of
$$\begin{cases} P_t = P_{t-1} + \Delta P \text{ met } \Delta P = (a - 1 + b \cdot R_{t-1}) \cdot P_{t-1} \\ R_t = R_{t-1} + \Delta R \text{ met } \Delta R = (c - 1 + d \cdot P_{t-1}) \cdot R_{t-1} \end{cases}$$
 met beginwaarden P_0 en R_0

$\Delta P = 0 \Rightarrow (a - 1 + b \cdot \bar{R}) \cdot \bar{P} = 0 \Rightarrow a - 1 + b \cdot \bar{R} = 0 \Rightarrow b \cdot \bar{R} = 1 - a \Rightarrow \bar{R} = \frac{1-a}{b}$.

$\Delta R = 0 \Rightarrow (c - 1 + d \cdot \bar{P}) \cdot \bar{R} = 0 \Rightarrow c - 1 + d \cdot \bar{P} = 0 \Rightarrow d \cdot \bar{P} = 1 - c \Rightarrow \bar{P} = \frac{1-c}{d}$.

66d Het getal a zal veranderen. $\bar{P} = \frac{1-c}{d}$ is niet afhankelijk van a , maar $\bar{R} = \frac{1-a}{b}$ wel.
Verandering van de vruchtbaarheid van de prooidieren heeft dus geen invloed op \bar{P} maar wel op \bar{R} .

67 $\Delta G < 0$, want door de griep zijn er steeds minder mensen die nog gezond zijn, maar vatbaar voor de griep.
 $\Delta I > 0$, want steeds meer inwoners worden immuun (niet meer vatbaar voor de ziekte).
 $\Delta G + \Delta Z + \Delta I = 0$, want $G_t + Z_t + I_t = G_{t-1} + Z_{t-1} + I_{t-1} = 2000$ (gesloten systeem).
Er geldt dan namelijk: $G_{t-1} + \Delta G + Z_{t-1} + \Delta Z + I_{t-1} + \Delta I = G_{t-1} + Z_{t-1} + I_{t-1} \Rightarrow \Delta G + \Delta Z + \Delta I = 0$.

68a $\Delta G + \Delta Z + \Delta I = 0 \Rightarrow \Delta Z = -\Delta G - \Delta I = 0,00018 \cdot G_{t-1} \cdot Z_{t-1} - 0,15 \cdot Z_{t-1}$.
Omdat $Z_t = Z_{t-1} + \Delta Z$ krijg je $Z_t = Z_{t-1} + 0,00018 \cdot G_{t-1} \cdot Z_{t-1} - 0,15 \cdot Z_{t-1}$.

68b Bij de aanwezigheid van één gezonde inwoner en één inwoner met griep is de kans dat de gezonde inwoner de griep krijgt van de inwoner met griep gelijk aan 0,00018.

68c $G_1 = G_0 - 0,00018 \cdot G_0 \cdot Z_0$, dus $G_1 = 1900 - 0,00018 \cdot 1900 \cdot 100 \approx 1866$.
 $Z_1 = Z_0 + 0,00018 \cdot G_0 \cdot Z_0 - 0,15 \cdot Z_0$, dus $Z_1 = 100 + 0,00018 \cdot 1900 \cdot 100 - 0,15 \cdot 100 \approx 119$.
 $G_1 + Z_1 + I_1 = 2000 \Rightarrow I_1 = 2000 - G_1 - Z_1 \approx 2000 - 1866 - 119 = 15$.
 $G_2 = G_1 - 0,00018 \cdot G_1 \cdot Z_1$, dus $G_2 = 1866 - 0,00018 \cdot 1866 \cdot 119 \approx 1826$.
 $Z_2 = Z_1 + 0,00018 \cdot G_1 \cdot Z_1 - 0,15 \cdot Z_1$, dus $Z_2 = 119 + 0,00018 \cdot 1866 \cdot 119 - 0,15 \cdot 119 \approx 141$.
 $G_2 + Z_2 + I_2 = 2000 \Rightarrow I_2 = 2000 - G_2 - Z_2 \approx 2000 - 1826 - 141 = 33$.

68d $G_{11} = G_{10} - 0,00018 \cdot G_{10} \cdot Z_{10} = 1265 - 0,00018 \cdot 1265 \cdot 404 \approx 1173$.
 $Z_{11} = Z_{10} + 0,00018 \cdot G_{10} \cdot Z_{10} - 0,15 \cdot Z_{10} = 404 + 0,00018 \cdot 1265 \cdot 404 - 0,15 \cdot 404 \approx 435$.

1900-0,00018*1900*100
1865,8
100+0,00018*1900*100
119,2
2000-1866-119
15
1866-0,00018*1866*119
1826,03028
119+0,00018*1866*119
141,11972
2000-1826-141
33
1265-0,00018*1265*404
1173,0092
404+0,00018*1265*404
435,3908

n	u(n)	v(n)	w(n)	n	u(n)	v(n)	w(n)	n	u(n)	v(n)	w(n)
0	1900	100	0	7	1522,7	285,99	181,29	14	805,25	486,19	598,47
1	1865,8	119,2	15	8	1444,6	335,71	225,69	15	824,46	502,62	622,89
2	1825,8	141,3	32,88	9	1355,2	369,14	275,6	16	749,89	501,82	748,29
3	1779,3	166,6	54,093	10	1265,2	402,82	330,97	17	682,16	494,28	822,56
4	1726	194,87	79,072	11	1175,2	435,21	391,54	18	621,47	480,82	897,7
5	1665,4	226,3	108,32	12	1084,3	467,04	456,82	19	567,68	462,48	969,83
6	1597,8	260,19	142,26	13	991,45	482,46	526,1	20	520,42	440,28	1039,2

68e Voor elke t geldt: $G_t + Z_t + I_t = 2000$ (gesloten systeem).
Vul de formules in op de GR (zie de schermen hierboven) en teken vervolgens in het werkboek de grafiek van I_t .

69a $G_1 = G_0 - a \cdot G_0 \cdot Z_0$, dus $9408 = 9600 - a \cdot 9600 \cdot 400 \Rightarrow a = 0,00005$.
 $Z_1 = Z_0 + a \cdot G_0 \cdot Z_0 - b \cdot Z_0$, dus $560 = 400 + 0,00005 \cdot 9600 \cdot 400 - b \cdot 400 \Rightarrow b = 0,08$.

69b De tweede dag loopt van $t=1$ tot $t=2$. Verder is $G_1 = 9408$ en $Z_1 = 560$.
Dus op de tweede dag hebben $0,00005 \cdot 9408 \cdot 560 \approx 263$ mensen griep gekregen.

9408-9600
Ans/(9600*400)
-5E-5
(560-400-0,00005*9600*400)/-400
0,00005*9408*560
263,424

70a $Z_t = Z_{t-1} + 0,0001 \cdot G_{t-1} \cdot Z_{t-1} - 0,20 \cdot Z_{t-1}$.

70b $G_0 + Z_0 + I_0 = 10000 \Rightarrow G_0 + Z_0 + 0 = 10000 \Rightarrow Z_0 = 10000 - G_0$.
 $G_1 = G_0 - 0,0001 \cdot G_0 \cdot Z_0 \Rightarrow 9216 = G_0 - 0,0001 \cdot G_0 \cdot Z_0 = G_0 - 0,0001 \cdot G_0 \cdot (10000 - G_0) = 0,0001 \cdot G_0^2 \Rightarrow$
 $0,0001 \cdot G_0^2 = 9216 \Rightarrow G_0^2 = 92160000 \Rightarrow G_0 = \sqrt{92160000} = 9600$ en $Z_0 = 10000 - 9600 = 400$.

70c $Z_1 = Z_0 + 0,0001 \cdot G_0 \cdot Z_0 - 0,20 \cdot Z_0 \Rightarrow 1,65 \cdot Z_0 = Z_0 + 0,0001 \cdot (10000 - Z_0) \cdot Z_0 - 0,20 \cdot Z_0 \Rightarrow$
 $1,65 \cdot Z_0 = 2 \cdot Z_0 - 0,0001 Z_0^2 - 0,20 \cdot Z_0 \Rightarrow 0,0001 Z_0^2 - 0,15 \cdot Z_0 = 0 \Rightarrow 0,0001 Z_0 \cdot (Z_0 - 1500) = 0$.
Dus $Z_0 = 1500$ en $G_0 = 10000 - 1500 = 8500$.

9216*10000
sqrt(Ans)
9600
10000-Ans
400

71a Het getal 0,8 betekent dat 80% van de personen die op het platteland woont, er een jaar later nog woont.
Het getal 0,04 betekent dat 4% van de inwoners van de stad een jaar later op het platteland woont.
Het getal 0,2 betekent dat 20% van de personen die op het platteland woont een jaar later in de stad woont.
Het getal 0,96 betekent dat 96% van de inwoners van de stad een jaar later nog in de stad woont.

71b $0,8 + 0,2 = 1 \Rightarrow$ alle inwoners van het platteland wonen een jaar later weer op het platteland of in de stad.
 $0,04 + 0,96 = 1 \Rightarrow$ alle inwoners van de stad wonen een jaar later weer in de stad of op het platteland.

72a $0,2 + 0,8 = 1$ en $0,7 + 0,3 = 1$.

72b Bij het eerste stelsel niet, want $0,4 + 0,8 \neq 1$ (en ook $0,6 + 0,2 \neq 1$).
Bij het tweede stelsel wel, want $0,1 + 0,9 = 1$ en ook $0,3 + 0,7 = 1$.

72b Dan kun je niet gebruiken dat $x_t + y_t = x_{t-1} + y_{t-1} = \text{constant}$.

72d Er treedt convergentie op (zie de schermen hiernaast).

n	u(n)	v(n)
0	20	20
1	26	22
2	23,6	22,2
3	24,56	22,56
4	24,376	22,432
5	24,288	22,4304
6	24,288	22,4304

n	u(n)	v(n)
7	24,288	22,4286
8	24,288	22,4288
9	24,288	22,4284
10	24,288	22,4286
11	24,288	22,4285
12	24,288	22,4286
13	24,288	22,4286

73a $0,9 + 0,1 = 1$ en $0,3 + 0,7 = 1 \Rightarrow$ een gesloten systeem $\Rightarrow A_{t-1} + B_{t-1} = 350 + 250 = 600$ (voor elke t).

$$\begin{cases} A_t = 0,9A_{t-1} + 0,3B_{t-1} \\ B_{t-1} = 600 - A_{t-1} \end{cases} \Rightarrow A_t = 0,9A_{t-1} + 0,3 \cdot (600 - A_{t-1})$$

$$A_t = 0,9A_{t-1} + 180 - 0,3A_{t-1}$$

$$A_t = 0,6A_{t-1} + 180 \text{ met } A_0 = 350$$

$$A_t = \bar{A} + a^t \cdot (A_0 - \bar{A}) \text{ met } \bar{A} = \frac{b}{1-a} = \frac{180}{1-0,6} = \frac{180}{0,4} = 450$$

$$A_t = 450 + 0,6^t \cdot (350 - 450) = 450 - 100 \cdot 0,6^t \text{ (voor } t \geq 0)$$

$$B_t = 600 - A_t$$

$$A_t = 450 - 100 \cdot 0,6^t \Rightarrow B_t = 600 - (450 - 100 \cdot 0,6^t)$$

$$B_t = 150 + 100 \cdot 0,6^t \text{ (voor } t \geq 0)$$

73b Voor grote t is $0,6^t \approx 0$, dus A_t convergeert naar $450 - 100 \cdot 0 = 450$ en B_t convergeert naar $150 + 100 \cdot 0 = 150$.

74a $0,25 + 0,75 = 1$ en $0,5 + 0,5 = 1 \Rightarrow$ een gesloten systeem $\Rightarrow x_{t-1} + y_{t-1} = 4 + 16 = 20$ (voor elke t).

$$\begin{cases} x_t = 0,25x_{t-1} + 0,5y_{t-1} \\ y_{t-1} = 20 - x_{t-1} \end{cases} \Rightarrow x_t = 0,25x_{t-1} + 0,5 \cdot (20 - x_{t-1})$$

$$x_t = 0,25x_{t-1} + 10 - 0,5x_{t-1}$$

$$x_t = -0,25x_{t-1} + 10 \text{ met } x_0 = 4$$

$$x_t = \bar{x} + a^t \cdot (x_0 - \bar{x}) \text{ met } \bar{x} = \frac{b}{1-a} = \frac{10}{1-0,25} = \frac{10}{0,75} = 8$$

$$x_t = 8 + (-0,25)^t \cdot (4 - 8) = 8 - 4 \cdot (-0,25)^t \text{ (voor } t \geq 0)$$

$$y_t = 20 - x_t$$

$$x_t = 8 - 4 \cdot (-0,25)^t \Rightarrow y_t = 20 - (8 - 4 \cdot (-0,25)^t)$$

$$y_t = 12 + 4 \cdot (-0,25)^t \text{ (voor } t \geq 0)$$

74b $x_t = 8 - 4 \cdot (-0,25)^t$ verschilt minder dan 0,01 van $\bar{x} = 8$ (TABLE) $\Rightarrow t \geq 5$.

Dus vanaf $t = 5$. (dit kan ook met de oorspronkelijke formules)

n	u(n)	v(n)
0	4	16
1	7,75	12,25
2	8,0625	11,9375
3	7,9944	12,0056
4	8,0033	11,9967
5	7,999	12,001

$$\begin{cases} N(t) = 0,6 \cdot N(t-1) + 0,2 \cdot R(t-1) \\ R(t) = 0,4 \cdot N(t-1) + 0,8 \cdot R(t-1) \end{cases}$$

met $N(0) = 0,8$ (miljoen) en $R(0) = 1,2$ (miljoen)

75b $0,6 + 0,4 = 1$ en $0,2 + 0,8 = 1 \Rightarrow$ een gesloten systeem $\Rightarrow N(t-1) + R(t-1) = 0,8 + 1,2 = 2$ (voor elke t).

$$\begin{cases} N(t) = 0,6 \cdot N(t-1) + 0,2 \cdot R(t-1) \\ R(t-1) = 2 - N(t-1) \end{cases} \Rightarrow N(t) = 0,6 \cdot N(t-1) + 0,2 \cdot (2 - N(t-1))$$

$$N(t) = 0,6 \cdot N(t-1) + 0,4 - 0,2 \cdot N(t-1)$$

$$N(t) = 0,4 \cdot N(t-1) + 0,4 \text{ met } N(0) = 0,8$$

$$N(t) = \bar{N} + a^t \cdot (N(0) - \bar{N}) \text{ met } \bar{N} = \frac{b}{1-a} = \frac{0,4}{1-0,4} = \frac{0,4}{0,6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$N(t) = \frac{2}{3} + 0,4^t \cdot (0,8 - \frac{2}{3}) = \frac{2}{3} + \frac{2}{15} \cdot 0,4^t \text{ (voor } t \geq 0)$$

$$N(t) = \frac{2}{3} + \frac{2}{15} \cdot 0,4^t \Rightarrow R(t) = 2 - (\frac{2}{3} + \frac{2}{15} \cdot 0,4^t)$$

$$R(t) = \frac{4}{3} - \frac{2}{15} \cdot 0,4^t \text{ (voor } t \geq 0)$$

75c Voor grote t is $0,4^t \approx 0$, dus $N(t)$ convergeert naar $\frac{2}{3} + \frac{2}{15} \cdot 0 = \frac{2}{3}$.

Op den duur kijken $\frac{2}{3}$ miljoen personen naar zender N.

76a $J(t) = J(t-1) - 0,10 \cdot J(t-1) + 0,2 \cdot V(t-1) - 0,06 \cdot J(t-1)$

$J(t) = 0,84 \cdot J(t-1) + 0,2 \cdot V(t-1)$ met $J(0) = 800$.

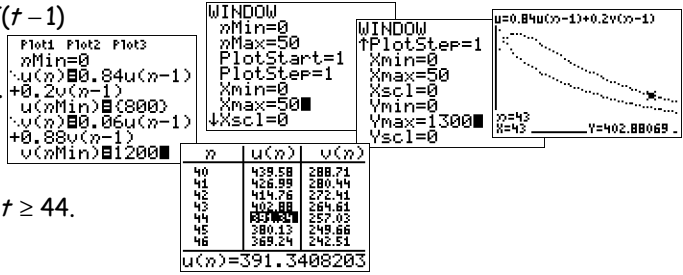
76b $V(t) = 0,06 \cdot J(t-1) + 0,88 \cdot V(t-1)$ met $V(0) = 1200$.

76c Je hebt niet te maken met een gesloten systeem.

76d Maak een schets van de plot hiernaast.

76e $J(t) < 400$ én (tegelijktijd ook) $V(t) < 400$ (TABLE) $\Rightarrow t \geq 44$.

Dus vanaf $t = 44$.

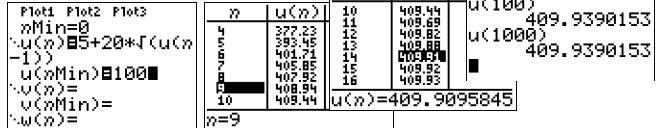


Diagnostische toets

D1a $u_6 \approx 402$ en $u_9 \approx 409$. (TABLE)

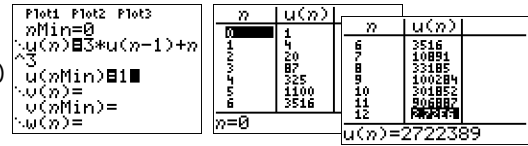
D1b $u_n > 409,9$ (TABLE) $\Rightarrow n \geq 14 \Rightarrow$ vanaf de 15^e term.

D1c De rij nadert naar 409,939.



D2a $u_0 = 1, u_1 = 4, u_2 = 20, u_3 = 87, u_4 = 325$ en $u_5 = 1100$. (TABLE)

D2b $u_n > 1000000$ (TABLE) $\Rightarrow n \geq 12$.

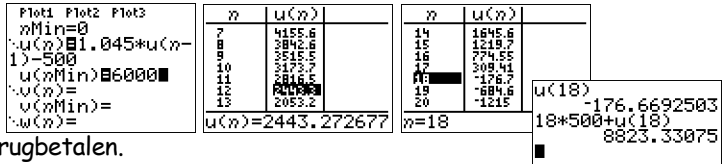


D3a $u_n = 1,045 \cdot u_{n-1} - 500$ met $u_0 = 6000$.

D3b $n = 12$ (TABLE) $\Rightarrow u_{12} \approx 2443,27$ (€).

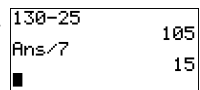
D3c $u_n < 0$ (TABLE) $\Rightarrow n \geq 18 \Rightarrow u_{18} \approx -176,67$ (€).

Hij moet $18 \times 500 - 176,67 = 8823,33$ (€) terugbetalen.



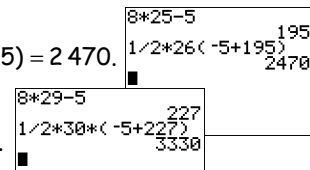
D4a Recursieve formule: $u_n = u_{n-1} + 7$ met $u_0 = 25$ en directe formule: $u_n = 25 + 7 \cdot n$ voor $n \geq 0$.

D4b $u_n = 130 \Rightarrow 25 + 7 \cdot n = 130 \Rightarrow 7 \cdot n = 105 \Rightarrow n = 15$. Dus de 16^e term is 130.



D5a $u_0 = 8 \cdot 25 - 5 = -5$ en $u_{25} = 8 \cdot 25 - 5 = 195 \Rightarrow \sum_{k=0}^{25} u_k = \sum_{k=0}^{25} (8k - 5) = \frac{1}{2} \cdot 26 \cdot (-5 + 195) = 2470$.

D5b $u_0 = -5$ en $u_{29} = 8 \cdot 29 - 5 = 227 \Rightarrow \sum_{k=0}^{29} u_k = \sum_{k=0}^{29} (8k - 5) = \frac{1}{2} \cdot 30 \cdot (-5 + 227) = 3330$.



D6a rr met $u_0 = 18$ en $v = 12 \Rightarrow$ directe formule: $u_n = 18 + 12n$ voor $n \geq 0$.

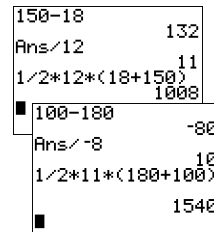
$u_n = 150$ (TABLE of) $\Rightarrow 18 + 12n = 150 \Rightarrow 12n = 132 \Rightarrow n = 11$.

Dus $18 + 30 + \dots + 150 = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot (18 + 150) = 1008$.

D6b rr met $u_0 = 180$ en $v = -8 \Rightarrow$ directe formule: $u_n = 180 - 8n$ voor $n \geq 0$.

$u_n = 100$ (TABLE of) $\Rightarrow 180 - 8n = 100 \Rightarrow -8n = -80 \Rightarrow n = 10$.

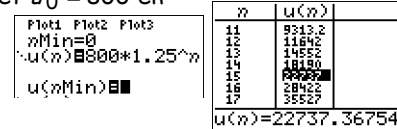
Dus $180 + 172 + \dots + 100 = \frac{1}{2} \cdot 11 \cdot (180 + 100) = 1540$.



D7a mr met $u_0 = 800$ en $r = 1,25 \Rightarrow$ recursieve formule: $u_n = u_{n-1} \cdot 1,25$ met $u_0 = 800$ en

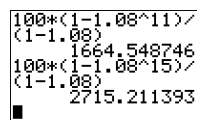
directe formule: $u_n = 800 \cdot 1,25^n$ voor $n \geq 0$.

D7b $u_n > 20000$ (TABLE) $\Rightarrow n \geq 15$. Dus vanaf de 16^e term.



D8a $\sum_{k=0}^{10} u_k = \sum_{k=0}^{10} (100 \cdot 1,08^k) = \frac{100 \cdot (1 - 1,08^{11})}{1 - 1,08} \approx 1664,55$.

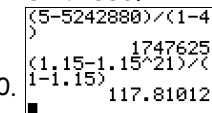
D8b $\sum_{k=0}^{14} (100 \cdot 1,08^k) = \frac{100 \cdot (1 - 1,08^{15})}{1 - 1,08} \approx 2715,21$.



D9a mr met $u_n = 1310710$ en $r = 4 \Rightarrow u_{n+1} = 1310710 \cdot 4 = 5242880$.

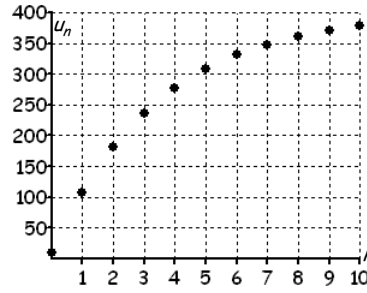
$5 + 20 + 80 + \dots + 1310710 = \frac{5 - 5242880}{1 - 4} = 1747625$.

D9b $1,15 + 1,15^2 + 1,15^3 + \dots + 1,15^{20} = \frac{1,15 - 1,15^{21}}{1 - 1,15} = 117,810$.



D10a Zie de tijdgrafiek hiernaast (gebruik TABLE).

n	u(n)	n	u(n)
0	10	4	276,6
1	107,5	5	207,45
2	180,63	6	230,59
3	235,4	7	247,94
4	276,6	8	260,56
5	307,45	9	270,72
6	330,59	10	278,04



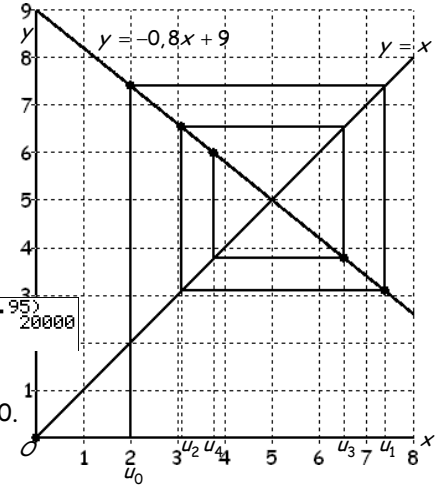
D10b Ja, de termen gaan steeds dichter richting grenswaarde

$$g = \frac{b}{1-a} = \frac{100}{1-0,75} = \frac{100}{0,25} = 400. \text{ (of } g = 0,75g + 100 \text{ oplossen)}$$

D11a Zie de webgrafiek hiernaast.

D11b De punten komen steeds dichter bij het snijpunt van de lijnen $y = -0,8x + 9$ en $y = x$ te liggen. De grenswaarde is

$$\frac{b}{1-a} = \frac{9}{1+0,8} = \frac{9}{1,8} = 5. \text{ (of } -0,8x + 9 = x \text{ oplossen)}$$



D12a Directe formule: $u_n = \bar{u} + a^n \cdot (u_0 - \bar{u})$ met $\bar{u} = \frac{b}{1-a} = \frac{-10}{1-1,25} = \frac{-10}{-0,25} = 40$.

$$\text{Dus } u_n = 40 + 1,25^n \cdot (20 - 40) = 40 - 20 \cdot 1,25^n \text{ voor } n \geq 0.$$

D12b Directe formule: $P_n = \bar{P} + a^n \cdot (P_0 - \bar{P})$ met $\bar{P} = \frac{b}{1-a} = \frac{1000}{1-0,95} = \frac{1000}{0,05} = 20000$.

$$\text{Dus } P_n = 20000 + 0,95^n \cdot (25000 - 20000) = 20000 + 5000 \cdot 0,95^n \text{ voor } n \geq 0.$$

D13a $Z_t = 0,8 \cdot Z_{t+1} + 16$ met $Z_0 = 100$. (afvoer 20% per uur, dus factor 0,8)

D13b Directe formule: $Z_n = \bar{Z} + a^n \cdot (Z_0 - \bar{Z})$ met $\bar{Z} = \frac{b}{1-a} = \frac{16}{1-0,8} = \frac{16}{0,2} = 80$.

$$\text{Dus } Z_n = 80 + 0,8^n \cdot (100 - 80) = 80 + 20 \cdot 0,8^n \text{ voor } t \geq 0.$$

D13c $Z_5 = 80 + 20 \cdot 0,8^5$ (TABLE) $\approx 86,6$ (kg).

D13d $Z_n < 80 + 0,5 = 80,5$ (TABLE) $\Rightarrow t \geq 17 \Rightarrow$ na 17 uur.

D14a $P_1 = 1455$ en $P_5 \approx 1305$. (TABLE)

D14b Na 43 maanden voor het eerst maximaal. Er zijn dan 2203 prooidieren. (TABLE)

D14c $P_t = 1,15 \cdot P_{t-1} - 0,001 \cdot R_{t-1} \cdot P_{t-1}$
 $R_t = 0,92 \cdot R_{t-1} + 0,00005 \cdot P_{t-1} \cdot R_{t-1}$
 met $P_0 = 1500$ en $R_0 = 180$

n	u(n)	v(n)	n	u(n)	v(n)
0	1500	180	39	80,88	80,88
1	1455	179,1	40	80,704	80,704
2	1412,7	177,9	41	80,532	80,532
3	1372,4	176,44	42	80,36	80,36
4	1333,9	174,44	43	80,208	80,208
5	1296,9	171,85	44	80,064	80,064
6	1261,2	169,32	45	80,021	80,021

$$\Delta P = 0 \Rightarrow (0,15 - 0,001 \cdot \bar{R}) \cdot \bar{P} = 0 \Rightarrow 0,15 - 0,001 \cdot \bar{R} = 0 \Rightarrow -0,001 \cdot \bar{R} = -0,15 \Rightarrow \bar{R} = \frac{-0,15}{-0,001} = 150.$$

$$\Delta R = 0 \Rightarrow (-0,08 + 0,00005 \cdot \bar{P}) \cdot \bar{R} = 0 \Rightarrow -0,08 + 0,00005 \cdot \bar{P} = 0 \Rightarrow 0,00005 \cdot \bar{P} = 0,08 \Rightarrow \bar{P} = \frac{0,08}{0,00005} = 1600.$$

D15a $G_1 \approx 14428$; $Z_1 \approx 548$; $I_1 = 25$;
 $G_2 \approx 14349$; $Z_2 \approx 599$ en $I_2 \approx 52$.

D15b De derde dag loopt van $t = 2$ tot $t = 3$. Verder is $G_2 \approx 14349$; $Z_2 \approx 599$.

Dus op de derde dag hebben $0,00001 \cdot 14349 \cdot 599 \approx 86$ mensen griep gekregen.

n	u(n)	v(n)	n	u(n)	w(n)
0	14500	500	0	500	0
1	14428	547,5	1	547,5	25
2	14349	599,12	2	599,12	52,375
3	14265	655,12	3	655,12	82,331
4	14169	715,81	4	715,81	115,08
5	14068	781,44	5	781,44	150,88
6	13958	852,3	6	852,3	189,95

D16 $0,15 + 0,85 = 1$ en $0,65 + 0,35 = 1 \Rightarrow$ een gesloten systeem $\Rightarrow x_{t-1} + y_{t-1} = 20 + 40 = 60$ (voor elke t).

$$\left. \begin{aligned} x_t &= 0,15x_{t-1} + 0,65y_{t-1} \\ y_{t-1} &= 60 - x_{t-1} \end{aligned} \right\} \Rightarrow x_t = 0,15x_{t-1} + 0,65 \cdot (60 - x_{t-1})$$

$$x_t = 0,15x_{t-1} + 39 - 0,65x_{t-1}$$

$$x_t = -0,5x_{t-1} + 39 \text{ met } x_0 = 20$$

$$x_t = \bar{x} + a^t \cdot (x_0 - \bar{x}) \text{ met } \bar{x} = \frac{b}{1-a} = \frac{39}{1-0,5} = \frac{39}{0,5} = 78$$

$$x_t = 78 + (-0,5)^t \cdot (20 - 78) = 78 - 58 \cdot (-0,5)^t \text{ (voor } t \geq 0)$$

$$y_t = 60 - x_t$$

$$x_t = 78 - 58 \cdot (-0,5)^t \Rightarrow y_t = 60 - (78 - 58 \cdot (-0,5)^t)$$

$$y_t = 18 + 58 \cdot (-0,5)^t \text{ (voor } t \geq 0)$$

Gemengde opgaven 7. Discrete dynamische modellen

G18a u_n is een rr met $u_0 = 300$ en verschil $v = 6$ en v_n is een mr met $v_0 = 0,1$ en factor $r = 2$.
 Recursieve formules: $u_n = u_{n-1} + 6$ met $u_0 = 300$ en $v_n = 2 \cdot v_{n-1}$ met $v_0 = 0,1$.
 Directe formules: $u_n = 300 + 6n$ voor $n \geq 0$ en $v_n = 0,1 \cdot 2^n$ voor $n \geq 0$.

n	u(n)	v(n)
0	300	0,1
1	306	0,2
2	312	0,4
3	318	0,8
4	324	1,6
5	330	3,2
6	336	6,4
7	342	12,8
8	348	25,6
9	354	51,2
10	360	102,4
11	366	204,8
12	372	409,6
13	378	819,2

G18b $v_n > u_n$ (TABLE) $\Rightarrow n \geq 12$. Dus vanaf $n = 12$.

G18c $S_n = \frac{1}{2} \cdot (n+1) \cdot (u_0 + u_n) = \frac{1}{2} \cdot (n+1) \cdot (300 + 300 + 6n) = \frac{1}{2} \cdot (n+1) \cdot (6n + 600)$.

$$T_n = \frac{v_0 \cdot (1 - r^{n+1})}{1 - r} = \frac{0,1 \cdot (1 - 2^{n+1})}{1 - 2} = \frac{0,1 \cdot (1 - 2^{n+1})}{-1} = -0,1 \cdot (1 - 2^{n+1})$$

$T_n > S_n$ (TABLE) $\Rightarrow n \geq 15$. Dus vanaf $n = 15$.

n	u(n)	v(n)
12	378	819,2
13	384	1638,4
14	390	3276,8
15	396	6553,6
16	402	13107,2
17	408	26214,4
18	414	52428,8

n	u(n)	v(n)
12	378	819,2
13	384	1638,4
14	390	3276,8
15	396	6553,6
16	402	13107,2
17	408	26214,4
18	414	52428,8

G19a $u_n = 0,9 \cdot u_{n-1} + 500$ met $u_0 = 10000$.

G19b $u_n = \bar{u} + a^n \cdot (u_0 - \bar{u})$ met $\bar{u} = \frac{b}{1-a}$, $a = 0,9$ en $b = 500$ dus $\bar{u} = \frac{500}{1-0,9} = \frac{500}{0,1} = 5000$.
 $u_n = 5000 + 0,9^n \cdot (10000 - 5000) = 5000 + 5000 \cdot 0,9^n$ voor $n \geq 0$

G19c $u_n < 7000$ (TABLE) $\Rightarrow n \geq 9$. Dus voor het eerst na 9 dagen.

n	u(n)	v(n)
9	6937,1	6937,1
10	6748,2	6748,2
11	6569,3	6569,3
12	6390,4	6390,4
13	6211,5	6211,5
14	6032,6	6032,6
15	5853,7	5853,7
16	5674,8	5674,8
17	5495,9	5495,9
18	5317,0	5317,0
19	5138,1	5138,1
20	4959,2	4959,2

G20a u_n is een rr met $u_0 = 1000$ en verschil $v = -23$, dus $u_n = 1000 - 23n$ voor $n \geq 0$.
 $u_n = 0 \Rightarrow 1000 - 23n = 0 \Rightarrow -23n = -1000 \Rightarrow n \approx 43,48$. Dus $u_n > 0$ voor $n \leq 43$.
 $S_{43} = \frac{1}{2} \cdot (n+1) \cdot (u_0 + u_{43}) = \frac{1}{2} \cdot 44 \cdot (1000 + 1000 - 23 \cdot 43) = 22242$.

n	u(n)	v(n)
11	638,24	638,24
12	615,21	615,21
13	592,18	592,18
14	569,15	569,15
15	546,12	546,12
16	523,09	523,09
17	500,06	500,06
18	477,03	477,03
19	454,00	454,00
20	430,97	430,97
21	407,94	407,94
22	384,91	384,91
23	361,88	361,88
24	338,85	338,85
25	315,82	315,82
26	292,79	292,79
27	269,76	269,76
28	246,73	246,73
29	223,70	223,70
30	200,67	200,67
31	177,64	177,64
32	154,61	154,61
33	131,58	131,58
34	108,55	108,55
35	85,52	85,52
36	62,49	62,49
37	39,46	39,46
38	16,43	16,43
39	-7,60	-7,60
40	-31,63	-31,63
41	-55,66	-55,66
42	-79,69	-79,69
43	-103,72	-103,72
44	-127,75	-127,75
45	-151,78	-151,78
46	-175,81	-175,81
47	-199,84	-199,84
48	-223,87	-223,87
49	-247,90	-247,90
50	-271,93	-271,93
51	-295,96	-295,96
52	-319,99	-319,99
53	-344,02	-344,02
54	-368,05	-368,05
55	-392,08	-392,08
56	-416,11	-416,11
57	-440,14	-440,14
58	-464,17	-464,17
59	-488,20	-488,20
60	-512,23	-512,23
61	-536,26	-536,26
62	-560,29	-560,29
63	-584,32	-584,32
64	-608,35	-608,35
65	-632,38	-632,38
66	-656,41	-656,41
67	-680,44	-680,44
68	-704,47	-704,47
69	-728,50	-728,50
70	-752,53	-752,53
71	-776,56	-776,56
72	-800,59	-800,59
73	-824,62	-824,62
74	-848,65	-848,65
75	-872,68	-872,68
76	-896,71	-896,71
77	-920,74	-920,74
78	-944,77	-944,77
79	-968,80	-968,80
80	-992,83	-992,83
81	-1016,86	-1016,86
82	-1040,89	-1040,89
83	-1064,92	-1064,92
84	-1088,95	-1088,95
85	-1112,98	-1112,98
86	-1137,01	-1137,01
87	-1161,04	-1161,04
88	-1185,07	-1185,07
89	-1209,10	-1209,10
90	-1233,13	-1233,13
91	-1257,16	-1257,16
92	-1281,19	-1281,19
93	-1305,22	-1305,22
94	-1329,25	-1329,25
95	-1353,28	-1353,28
96	-1377,31	-1377,31
97	-1401,34	-1401,34
98	-1425,37	-1425,37
99	-1449,40	-1449,40
100	-1473,43	-1473,43
101	-1497,46	-1497,46
102	-1521,49	-1521,49
103	-1545,52	-1545,52
104	-1569,55	-1569,55
105	-1593,58	-1593,58
106	-1617,61	-1617,61
107	-1641,64	-1641,64
108	-1665,67	-1665,67
109	-1689,70	-1689,70
110	-1713,73	-1713,73
111	-1737,76	-1737,76
112	-1761,79	-1761,79
113	-1785,82	-1785,82
114	-1809,85	-1809,85
115	-1833,88	-1833,88
116	-1857,91	-1857,91
117	-1881,94	-1881,94
118	-1905,97	-1905,97
119	-1929,00	-1929,00
120	-1953,03	-1953,03
121	-1977,06	-1977,06
122	-2001,09	-2001,09
123	-2025,12	-2025,12
124	-2049,15	-2049,15
125	-2073,18	-2073,18
126	-2097,21	-2097,21
127	-2121,24	-2121,24
128	-2145,27	-2145,27
129	-2169,30	-2169,30
130	-2193,33	-2193,33
131	-2217,36	-2217,36
132	-2241,39	-2241,39
133	-2265,42	-2265,42
134	-2289,45	-2289,45
135	-2313,48	-2313,48
136	-2337,51	-2337,51
137	-2361,54	-2361,54
138	-2385,57	-2385,57
139	-2409,60	-2409,60
140	-2433,63	-2433,63
141	-2457,66	-2457,66
142	-2481,69	-2481,69
143	-2505,72	-2505,72
144	-2529,75	-2529,75
145	-2553,78	-2553,78
146	-2577,81	-2577,81
147	-2601,84	-2601,84
148	-2625,87	-2625,87
149	-2649,90	-2649,90
150	-2673,93	-2673,93
151	-2697,96	-2697,96
152	-2721,99	-2721,99
153	-2746,02	-2746,02
154	-2770,05	-2770,05
155	-2794,08	-2794,08
156	-2818,11	-2818,11
157	-2842,14	-2842,14
158	-2866,17	-2866,17
159	-2890,20	-2890,20
160	-2914,23	-2914,23
161	-2938,26	-2938,26
162	-2962,29	-2962,29
163	-2986,32	-2986,32
164	-3010,35	-3010,35
165	-3034,38	-3034,38
166	-3058,41	-3058,41
167	-3082,44	-3082,44
168	-3106,47	-3106,47
169	-3130,50	-3130,50
170	-3154,53	-3154,53
171	-3178,56	-3178,56
172	-3202,59	-3202,59
173	-3226,62	-3226,62
174	-3250,65	-3250,65
175	-3274,68	-3274,68
176	-3298,71	-3298,71
177	-3322,74	-3322,74
178	-3346,77	-3346,77
179	-3370,80	-3370,80
180	-3394,83	-3394,83
181	-3418,86	-3418,86
182	-3442,89	-3442,89
183	-3466,92	-3466,92
184	-3490,95	-3490,95
185	-3514,98	-3514,98
186	-3539,01	-3539,01
187	-3563,04	-3563,04
188	-3587,07	-3587,07
189	-3611,10	-3611,10
190	-3635,13	-3635,13
191	-3659,16	-3659,16
192	-3683,19	-3683,19
193	-3707,22	-3707,22
194	-3731,25	-3731,25
195	-3755,28	-3755,28
196	-3779,31	-3779,31
197	-3803,34	-3803,34
198	-3827,37	-3827,37
199	-3851,40	-3851,40
200	-3875,43	-3875,43
201	-3899,46	-3899,46
202	-3923,49	-3923,49
203	-3947,52	-3947,52
204	-3971,55	-3971,55
205	-3995,58	-3995,58
206	-4019,61	-4019,61
207	-4043,64	-4043,64
208	-4067,67	-4067,67
209	-4091,70	-4091,70
210	-4115,73	-4115,73
211	-4139,76	-4139,76
212	-4163,79	-4163,79
213	-4187,82	-4187,82
214	-4211,85	-4211,85
215	-4235,88	-4235,88
216	-4259,91	-4259,91
217	-4283,94	-4283,94
218	-4307,97	-4307,97
219	-4331,00	-4331,00
220	-4355,03	-4355,03
221	-4379,06	-4379,06
222	-4403,09	-4403,09
223	-4427,12	-4427,12
224	-4451,15	-4451,15
225	-4475,18	-4475,18
226	-4499,21	-4499,21
227	-4523,24	-4523,24
228	-4547,27	-4547,27
229	-4571,30	-4571,30
230	-4595,33	-4595,33
231	-4619,36	-4619,36
232	-4643,39	-4643,39
233	-4667,42	-4667,42
234	-4691,45	-4691,45
235	-4715,48	-4715,48
236	-4739,51	-4739,51
237	-4763,54	-4763,54
238	-4787,57	-4787,57
239	-4811,60	-4811,60
240	-4835,63	-4835,63
241	-4859,66	-4859,66
242	-4883,69	-4883,69
243	-4907,72	-4907,72
244	-4931,75	-4931,75
245	-4955,78	-4955,78
246	-4979,81	-4979,81
247	-5003,84	-5003,84
248	-5027,87	-5027,87
249	-5051,90	-5051,90
250	-5075,93	-5075,93
251	-5099,96	-5099,96
252	-5123,99	-5123,99
253	-5148,02	-5148,02
254	-5172,05	-5172,05
255	-5196,08	-5196,08
256	-5220,11	-5220,11
257	-5244,14	-5244,14
258	-5268,17	-5268,17
259	-5292,20	-5292,20
260	-5316,23	-5316,23
261	-5340,26	-5340,26
262	-5364,29	-5364,29
263	-5388,32	-5388,32
264	-5412,35	-5412,35
265	-5436,38	-5436,38
266	-5460,41	-5460,41
267	-5484,44	-5484,44
268	-5508,47	

G23c $u_n = 500 \cdot 0,87^n$ is een mr met $u_0 = 500$ en $r = 0,87$.

$$S_{10} = \sum_{k=0}^{10} u_k = \frac{500 \cdot (1 - 0,87^{11})}{1 - 0,87} \approx 3014,89.$$

Of: $S_n = S_{n-1} + u_n$ met $S_0 = 500$ (TABLE) $\Rightarrow S_{10} = \sum_{k=0}^{10} u_k \approx 3014,89$.

n	u(n)	v(n)
4	286,45	1929,2
5	249,21	2178,4
6	216,81	2398,2
7	188,11	2583,8
8	163,11	2747,9
9	142,77	2890
10	124,21	3014,89

G23d $u_n = 1,12 \cdot u_{n-1}$ met $u_0 = 10$ is een mr met $r = 1,12$.

$$S_{10} = \sum_{k=0}^{10} u_k = \frac{10 \cdot (1 - 1,12^{11})}{1 - 1,12} \approx 206,55.$$

Of: $S_n = S_{n-1} + u_n$ met $S_0 = 10$ (TABLE) $\Rightarrow S_{10} = \sum_{k=0}^{10} u_k \approx 206,55$.

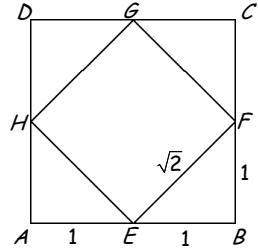
n	u(n)	v(n)
4	15,725	63,528
5	17,603	81,152
6	19,728	100,89
7	22,107	123
8	24,76	147,76
9	27,721	175,48
10	31,05	206,55

G24a Noem de hoogte van de onderste kubus $h_0 = 6$.

$$h_n = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot h_{n-1} \quad (EF = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}) \text{ met } h_0 = 6 \text{ is een mr met } r = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$S_7 = \sum_{k=0}^7 h_k = \frac{6 \cdot (1 - (\frac{\sqrt{2}}{2})^8)}{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}} \approx 19,2 \text{ (cm).}$$

Of: $S_n = S_{n-1} + h_n$ met $S_0 = 6$ (TABLE) $\Rightarrow S_7 = \sum_{k=0}^7 h_k \approx 19,2$ (cm).



n	u(n)	v(n)
1	4,2426	10,243
2	3,0121	13,243
3	2,15	16,884
4	1,5607	19,884
5	1,118	22,48
6	0,7923	24,88
7	0,5633	27,03

Noem het volume van de onderste kubus $v_0 = 6^3 = 216$.

$$v_n = (\frac{\sqrt{2}}{2})^3 \cdot v_{n-1} \text{ met } v_0 = 216 \text{ is een mr met } r = (\frac{\sqrt{2}}{2})^3.$$

$$T_7 = \sum_{k=0}^7 v_k = \frac{216 \cdot (1 - ((\frac{\sqrt{2}}{2})^3)^8)}{1 - (\frac{\sqrt{2}}{2})^3} \approx 334,053 \text{ (cm}^3\text{)}.$$

Of: $T_n = T_{n-1} + v_n$ met $T_0 = 216$ (TABLE) $\Rightarrow T_7 = \sum_{k=0}^7 v_k \approx 334,053$ (cm³).

G24b $S_n > 20$ (TABLE) $\Rightarrow n \geq 10$. Dus minimaal 11 kubussen nodig.

G25a Na 1 maand is de schuld $100000 \cdot 1,004 - 1000 = 99400$ (€).

Na 2 maanden is de schuld $99400 \cdot 1,004 - 2000 = 97796,60$ (€).

G25b Na 3 maanden is de schuld $97796,60 \cdot 1,004 - 3000 \approx 95188,79$ (€).

G25c $u_n = 1,004 \cdot u_{n-1} - 1000n$ met $u_0 = 100000$.

$u_n < 0$ (TABLE) $\Rightarrow n \geq 14$. Dus na 14 maanden is de schuld afgelost.

G26a $A_n = 0,6 \cdot A_{n-1} + 1000$ met $A_0 = 1800$.

G26b Zie de webgrafiek hiernaast. De rij A_n convergeert.

$$G26c \quad A_n = \bar{A} + a^n \cdot (A_0 - \bar{A}) \text{ met } \bar{A} = \frac{b}{1-a} = \frac{1000}{1-0,6} = 2500.$$

$$\text{Dus } A_n = 2500 + 0,6^n \cdot (1800 - 2500) = 2500 - 700 \cdot 0,6^n.$$

G27a 9:00 80000

$$10:00 \quad 80000 + 0,05 \cdot (1000000 - 80000) = 126000$$

$$11:00 \quad 126000 + 0,05 \cdot (1000000 - 126000) = 169700$$

$$12:00 \quad 169700 + 0,05 \cdot (1000000 - 169700) = 211215.$$

G27b $R_n = R_{n-1} + 0,05 \cdot (1000000 - R_{n-1})$ met $R_0 = 80000$

$$= R_{n-1} + 50000 - 0,05 \cdot R_{n-1} \text{ met } R_0 = 80000$$

$$= 0,95 \cdot R_{n-1} + 50000 \text{ met } R_0 = 80000.$$

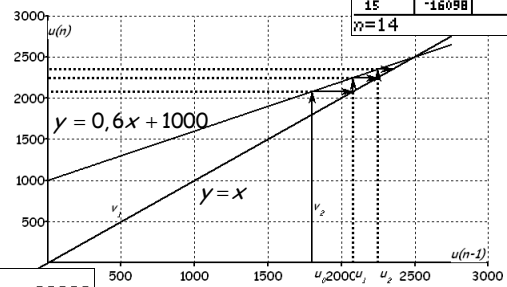
G27c $R_n = \bar{R} + a^n \cdot (R_0 - \bar{R})$ met $\bar{R} = \frac{b}{1-a} = \frac{50000}{1-0,95} = \frac{50000}{0,05} = 1000000$.

$$\text{Dus } R_n = 1000000 + 0,95^n \cdot (80000 - 1000000) = 1000000 - 920000 \cdot 0,95^n.$$

G27d Bij 2 februari om 12:00 (16^e boodschap) hoort $n = 15$.

Dus (TABLE) $R_{15} \approx 573772$ of bijna 574000.

n	u(n)	v(n)
9	58175	502869
10	48407	527725
11	37801	551339
12	25751	573772
13	12855	595085
14	-1084	615289
15	-16088	634563



n	u(n)	v(n)
0	80000	80000
1	126000	126000
2	169700	169700
3	211215	211215

n	u(n)	v(n)
0	80000	80000
1	126000	126000
2	169700	169700
3	211215	211215
4	250000	250000
5	280000	280000
6	302500	302500
7	317500	317500
8	325000	325000

n	u(n)	v(n)
12	502869	502869
13	527725	527725
14	551339	551339
15	573772	573772
16	595085	595085
17	615289	615289
18	634563	634563

n	u(n)	v(n)
27	789683	789683
28	781198	781198
29	782139	782139
30	802532	802532
31	812405	812405
32	821785	821785
33	830696	830696

u(n)=812405.7203

G27e $R_n - R_{n-1} \leq 10000 \Rightarrow n \geq 31$. Dus na 32 uitzendingen.
Er zijn dan ruim 812000 personen uit de doelgroep bereikt.

G28a $A_n = 0,73 \cdot A_{n-1} + 12$ met $A_0 = 20$.

G28b $A_n = \bar{A} + a^n \cdot (A_0 - \bar{A})$ met $\bar{A} = \frac{12}{1-0,73} = \frac{12}{0,27} \approx 44,44$.

Dus $A_n \approx 44,44 + 0,73^n \cdot (20 - 44,44) = 44,44 - 24,44 \cdot 0,73^n$.

$$\begin{aligned} &1 - 0,73 && .27 \\ &12 / 0,27 && 44.44444444 \end{aligned}$$

G28c $A_t = 0,73^{\frac{1}{24}} \cdot A_{t-1} + 0,5 \approx 0,987 \cdot A_{t-1} + 0,5$ met $A_0 = 20$.

$A_t = \bar{A} + a^t \cdot (A_0 - \bar{A})$ met $\bar{A} = \frac{0,5}{1-0,987} \approx 38,38$.

Dus $A_t \approx 38,38 + 0,987^t \cdot (20 - 38,38) = 38,38 - 18,38 \cdot 0,987^t$.

$$\begin{aligned} &0,73^{(1/24)} && .9869726524 \\ &0,5 / (1 - \text{Ans}) && 38.38079835 \end{aligned}$$

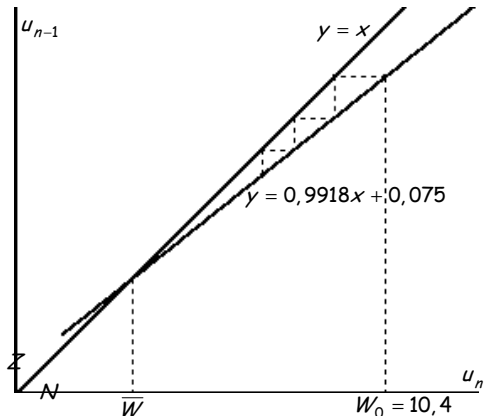
G28d De tweede differentievergelijking met $\bar{A} \approx 38,38$ heeft de voorkeur.

De evenwichtswaarde is lager dan in de eerste situatie, dat wil zeggen dat er minder verontreiniging overblijft.

G29a In 1999 is $t = 78$ (TABLE) $\Rightarrow W_{78} \approx 9,62$ (seconden).

Dit wijkt $\frac{9,79 - W_{78}}{9,79} \times 100\% \approx 1,7\%$ af van de werkelijkheid.

Plot1	Plot2	Plot3
nMin=0 u(n)=0.999*u(n-1) u(nMin)=10.4 v(nMin)= w(n)=	u(78) Ans=9.619254628 -1.1707453725 Ans=9.79*100 -1.744079392	Plot1 Plot2 Plot3 nMin=0 u(n)=0.9918*u(n-1)+0.075 u(nMin)=10.4 u(89) 9.748796326



G29b In 2010 is $t = 89$ (TABLE) $\Rightarrow W_{89} \approx 9,75$ (seconden).

G29c Schets de lijnen $y = 0,9918x + 0,075$ en $y = x$.

Maak een schets van de webgrafiek hiernaast.
 W_t convergeert van boven af naar de evenwichtswaarde.

De evenwichtswaarde is $\bar{W} = \frac{0,075}{1-0,9918} \approx 9,15$ (seconden).

G30a $P_1 = 1,20P_0 + a \cdot R_0 \cdot P_0$, dus $5775 = 1,20 \cdot 5500 + a \cdot 300 \cdot 5500 \Rightarrow a = -0,0005$.

$R_1 = 0,90R_0 + b \cdot P_0 \cdot R_0$, dus $303 = 0,90 \cdot 300 + b \cdot 5500 \cdot 300 \Rightarrow b = 0,00002$.

G30b $P_t = 1,20P_{t-1} - 0,0005 \cdot R_{t-1} \cdot P_{t-1}$
 $= P_{t-1} + 0,20P_{t-1} - 0,0005 \cdot R_{t-1} \cdot P_{t-1}$
 $= P_{t-1} + (0,20 - 0,0005 \cdot R_{t-1}) \cdot P_{t-1}$
 $= P_{t-1} + \Delta P$.

In evenwichtswaarde is

$P_t = P_{t-1} = \bar{P}$ en $R_t = R_{t-1} = \bar{R} \Rightarrow \Delta P = 0$, dus

$(0,20 - 0,0005 \cdot \bar{R}) \cdot \bar{P} = 0$

$0,20 - 0,0005 \cdot \bar{R} = 0$

$0,0005 \cdot \bar{R} = 0,20$

$\bar{R} = 400$.

$R_t = 0,90R_{t-1} + 0,00002 \cdot P_{t-1} \cdot R_{t-1}$
 $= R_{t-1} - 0,10R_{t-1} + 0,00002 \cdot P_{t-1} \cdot R_{t-1}$
 $= R_{t-1} + (-0,10 + 0,00002 \cdot P_{t-1}) \cdot R_{t-1}$
 $= R_{t-1} + \Delta R$.

In evenwichtswaarde is

$P_t = P_{t-1} = \bar{P}$ en $R_t = R_{t-1} = \bar{R} \Rightarrow \Delta R = 0$, dus

$(-0,10 + 0,00002 \cdot \bar{P}) \cdot \bar{R} = 0$

$-0,10 + 0,00002 \cdot \bar{P} = 0$

$0,00002 \cdot \bar{P} = 0,10$

$\bar{P} = 5000$.

G30c Van $t = 0$ tot $t = 6 \cdot 12 = 72$ is het aantal prooidieren maximaal op $t = 56$.

$P_{\max} = P_{56} = 9279$ en $R_{56} = 423$.

Plot1	Plot2	Plot3
nMin=0 u(n)=1.20u(n-1) -0.0005v(n-1)u(n-1) u(nMin)=5500 v(n)= w(nMin)=	-1) u(nMin)=5500 +0.00002u(n-1)v(n-1) n-1) u(nMin)=300 w(n)=	n 0 5500 300 1 5775 303 2 6055.1 307.7 3 6344.5 314.18 4 6606.3 322.58 5 6862.1 332.94 6 7092.2 345.34 n=0

G31a $G_1 = G_0 - a \cdot G_0 \cdot Z_0$, dus $5982 = 6000 - a \cdot 6000 \cdot 100 \Rightarrow a = 0,00003$.

$Z_1 = Z_0 + a \cdot G_0 \cdot Z_0 - b \cdot Z_0$, dus $112 = 100 + 0,00003 \cdot 6000 \cdot 100 - b \cdot 100 \Rightarrow b = 0,06$.

G31b De derde dag loopt van $t = 2$ tot $t = 3$. Verder is $G_1 = 9408$ en $Z_1 = 560$.

$G_2 = G_1 - 0,00003 \cdot G_1 \cdot Z_1 = 9408 - 0,00003 \cdot 9408 \cdot 560 \approx 5962$.

$Z_2 = Z_1 + 0,00003 \cdot G_1 \cdot Z_1 - 0,06 \cdot Z_1 = 560 + 0,00003 \cdot 9408 \cdot 560 - 0,06 \cdot 560 \approx 125$.

Dus op de derde dag hebben $0,00003 \cdot 5962 \cdot 125 \approx 22$ mensen griep gekregen.

Op de derde dag zijn er $0,06 \cdot 125 \approx 8$ mensen beter geworden.

G31c Op de 15^e dag hebben $0,00003 \cdot 5456 \cdot 455 \approx 74$ mensen griep gekregen.

Op de 15^e dag zijn er $0,06 \cdot 455 \approx 27$ mensen beter geworden.

$(6000 - 5982) / 6000$ 0.00003	$(100 + 0.00003 * 6000 * 100 - 112) / 100$ 0.06
$5982 - 0.00003 * 9408 * 560$ 5962.112	$560 + 0.00003 * 9408 * 560 - 0.06 * 560$ 125.37952
$0.00003 * 5962 * 125$ 22.3575	$0.06 * 125$ 7.5
$0.00003 * 5456 * 455$ 74.4744	$0.06 * 455$ 27.3

G32a
$$\begin{cases} N_t = 0,76 \cdot N_{t-1} + 0,18 \cdot B_{t-1} \\ B_t = 0,24 \cdot N_{t-1} + 0,82 \cdot B_{t-1} \end{cases}$$
 met $N_0 = 20000$ en $B_0 = 10000$

G32b $0,76 + 0,24 = 1$ en $0,18 + 0,82 = 1 \Rightarrow$ een gesloten systeem $\Rightarrow N_{t-1} + B_{t-1} = 20000 + 10000 = 30000$ (voor elke t).

$$\begin{cases} N_t = 0,76N_{t-1} + 0,18B_{t-1} \\ B_{t-1} = 30000 - N_{t-1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} N_t = 0,76N_{t-1} + 0,18 \cdot (30000 - N_{t-1}) \\ N_t = 0,76N_{t-1} + 5400 - 0,18N_{t-1} \\ N_t = 0,58N_{t-1} + 5400 \text{ met } N_0 = 20000 \end{cases}$$

$0,18 \cdot 30000$	5400
$0,76 - 0,18$	$0,58$
$5400 \cdot (1 - 0,58)$	$12857,14286$

$$N_t = \bar{N} + a^t \cdot (N_0 - \bar{N}) \text{ met } \bar{N} = \frac{b}{1-a} = \frac{5400}{1-0,58} = \frac{39}{0,42} \approx 12857$$

$$N_t = 12857 + 0,58^t \cdot (20000 - 12857) = 12857 + 7143 \cdot 0,58^t \text{ (voor } t \geq 0)$$

$$B_t = 30000 - N_t$$

$$\begin{cases} N_t = 12857 + 7143 \cdot 0,58^t \\ B_t = 30000 - (12857 + 7143 \cdot 0,58^t) \\ B_t = 17143 - 7143 \cdot 0,58^t \text{ (voor } t \geq 0) \end{cases}$$

$20000 - 12857$	7143
$30000 - 12857$	17143

G32c Voor grote t is $0,58^t \approx 0$, dus N_t convergeert naar $12857 + 0 = 12857$ en B_t convergeert naar $17143 - 0 = 17143$.

G32d
$$\begin{cases} N_t = 0,74 \cdot N_{t-1} + 0,15 \cdot B_{t-1} + 0,20 \cdot G_{t-1} \\ B_t = 0,22 \cdot N_{t-1} + 0,80 \cdot B_{t-1} + 0,10 \cdot G_{t-1} \\ G_t = 0,04 \cdot N_{t-1} + 0,05 \cdot B_{t-1} + 0,70 \cdot G_{t-1} \end{cases}$$
 met $N_0 = 20000$, $B_0 = 10000$ en $G_0 = 5000$

Plot1	Plot2	Plot3
$nMin=0$	$+0,80u(n-1)+0,10$	$w(n-1)$
$u(n)=0,74u(n-1)$	$+0,15u(n-1)+0,20$	$w(nMin)=10000$
$+0,15u(n-1)+0,20$	$w(nMin)=10000$	$w(n)=0,04u(n-1)$
$w(n-1)$	$+0,05u(n-1)+0,70$	$w(n-1)$
$u(nMin)=20000$	$w(nMin)=5000$	
$u(n)=0,22u(n-1)$	$+0,80u(n-1)+0,10$	
$+0,80u(n-1)+0,10$		

n	u(n)	w(n)
0	20000	10000
1	17300	12900
2	15887	14606
3	14746	15508
4	14182	16195
5	13849	16738
6	13651	17143
n=0		

n	u(n)	w(n)
0	10000	5000
1	12900	4800
2	14606	4687
3	15508	4617
4	16195	4573,5
5	16738	4543,8
6	17143	4609,8

$w(n) = 4646,88$

G32e Voer bovenstaande rijen-formules in op de GR (TABLE) $\Rightarrow G_3 \approx 4646$. Dus 4646 inwoners van Middelburg gaan op $t = 3$ niet op vakantie.

TI-84 6. Getallenrijen (met MODE instellen op SEQ)

6A. Het rijen-invoerscherm

1abc

Zie de schermen hiernaast.
(formules invoeren in $\overline{Y=}$ -scherm)
(n met $\overline{X,T,\theta,n}$ en u is $\overline{2nd}$ $\overline{7}$)

6B. Het invoeren van een recursieve formule

2a

Zie het scherm hiernaast. (is de toets boven 7)

2b

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55. (zie de tabel hiernaast)

2c

$u_{19} = 6765$. (blader door de tabel / basisscherm)

3a

-2, 3, -1, 5, 3, 13, 19. (zie de tabel hiernaast)

$u_{20} = 349523$ en $u_{50} \approx 3,753 \times 10^4$.

3b

2 4 2 0,5 0,25 0,5 2. (zie de tabel hiernaast)

$u_{20} = 2$ en $u_{50} = 2$.

4a

$u_{20} = 1945$ en $u_{50} = 12355$.

4b

$u_{10} = 1938$ en $u_{45} \approx 7,037 \times 10^{13}$.

TI-84 7. Grafieken bij rijen

7A. Tijdgrafieken (met 2nd ZOOM =FORMAT instellen op Time)

1a

Zie de schermen hieronder. (blader eens door TABLE)

Neem (bijvoorbeeld) $Y_{min} = 0$ en $Y_{max} = 1500$. (met TRACE en \blacktriangleright of \blacktriangleleft loop je over de grafiek)

1b

Zie de schermen hieronder. (blader eerst door TABLE) Neem (bijvoorbeeld) $Y_{min} = 0$ en $Y_{max} = 10$.

1c

Zie de schermen hieronder. (blader eerst door TABLE) Neem (bijvoorbeeld) $Y_{min} = 0$ en $Y_{max} = 25$.

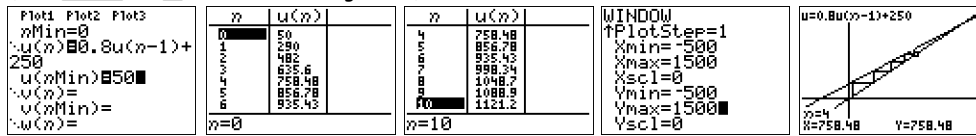
1d

Zie de schermen hieronder. (blader eerst door TABLE) Neem (bijvoorbeeld) $Y_{min} = 0$ en $Y_{max} = 12000$.

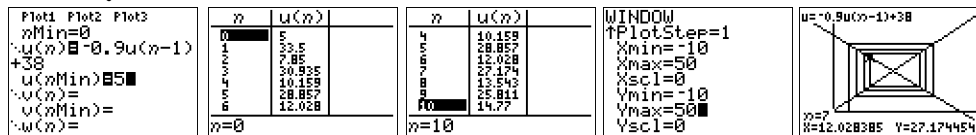
7B. Webgrafieken (met **2nd** **ZOOM** =FORMAT instellen op Web)

```
TimeWeb uv vw uw
VectGC PolarGC
CoordOn CoordOff
GridOff GridOn
AxesOff AxesOn
LabelOff LabelOn
ExprOff ExprOn
```

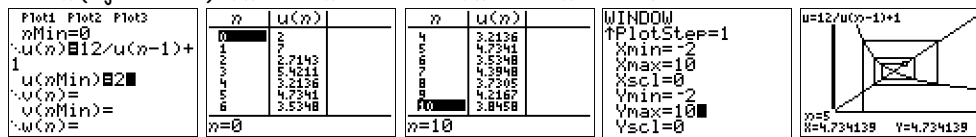
- 2a Zie de schermen hieronder. (blader eerst door TABLE)
Neem (bijvoorbeeld) $X_{min} = Y_{min} = -500$ en $X_{max} = Y_{max} = 1500$.
(met **TRACE** en **▶** ontstaat de webgrafiek)



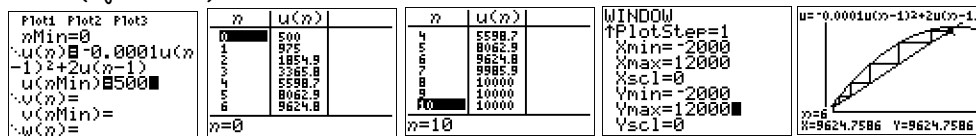
- 2b Zie de schermen hieronder. (blader eerst door TABLE)
Neem (bijvoorbeeld) $X_{min} = Y_{min} = -10$ en $X_{max} = Y_{max} = 50$.



- 2c Zie de schermen hieronder. (blader eerst door TABLE)
Neem (bijvoorbeeld) $X_{min} = Y_{min} = -2$ en $X_{max} = Y_{max} = 10$.



- 2d Zie de schermen hieronder. (blader eerst door TABLE)
Neem (bijvoorbeeld) $X_{min} = Y_{min} = -2000$ en $X_{max} = Y_{max} = 12000$.



- ▣ recursieve formule van een rr: $u_n = u_{n-1} + v$ met beginterm u_0
- ▣ directe formule van een rr: $u_n = u_0 + v \cdot n$ voor $n \geq 0$
- ▣ $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \dots + u_n$
- ▣ recursieve somformule van een rr: $S_n = S_{n-1} + u_n$ met $S_0 = u_0$
- ▣ directe somformule van een rr: $S_n = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{n+1}{\text{aantal termen}} \right) \cdot \left(\frac{u_0}{\text{eerste term}} + \frac{u_n}{\text{laatste term}} \right)$ voor $n \geq 0$
- ▣ $u_{10} + u_{11} + u_{12} + u_{13} + \dots + u_{100} = \frac{1}{2} \cdot \frac{91}{\text{aantal termen}} \cdot \left(\frac{u_{10}}{\text{eerste term}} + \frac{u_{100}}{\text{laatste term}} \right)$
- ▣ recursieve formule van een mr: $u_n = u_{n-1} \cdot r$ met beginterm u_0
- ▣ directe formule van een mr: $u_n = u_0 \cdot r^n$ voor $n \geq 0$
- ▣ $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \dots + u_n$
- ▣ recursieve somformule van een mr: $S_n = S_{n-1} + u_n$ met $S_0 = u_0$
- ▣ directe somformule van een mr: $S_n = \frac{u_0 - u_{n+1}}{1-r}$ of $\frac{u_0 \cdot (1 - r^{n+1})}{1-r}$ voor $n \geq 0$
- ▣ $u_{10} + u_{11} + u_{12} + u_{13} + \dots + u_{100} = \frac{u_{10} - u_{101}}{1-r}$ of $\frac{u_{10} \cdot (1 - r^{91})}{1-r}$
- ▣ de recursieve formule $u_n = a \cdot u_{n-1} + b$ met beginterm u_0 heeft als directe formule $u_n = \bar{u} + a^n \cdot (u_0 - \bar{u})$ met $\bar{u} = \frac{b}{1-a}$