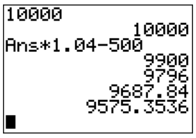
1a $10\,000 \times 1{,}04 - 500 = 9\,900$.

1b $9\,900 \times 1{,}04 - 500 = 9\,796$.

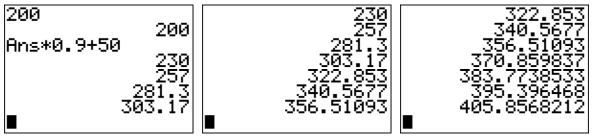
1c Zie de tabel hiernaast.



datum	1-1-2006	1-1-2007	1-1-2008	1-1-2009	1-1-2010
restschuld	10000	9900	9796	9687,84	9575,35

2a $u_6 \approx 340{,}57$ en $u_7 \approx 356{,}51$.

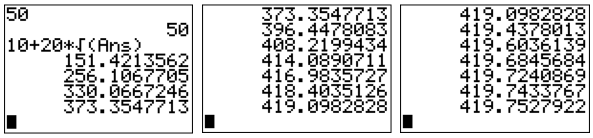
2b $u_{10} \approx 395{,}40$ en $u_{11} \approx 405{,}86 \Rightarrow$ vanaf de 12^e term.



3a $u_3 \approx 330{,}07$ en $u_4 \approx 373{,}35$.

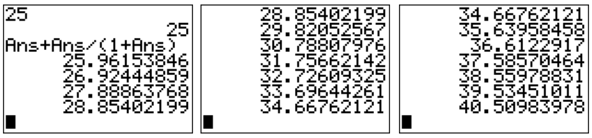
3b $u_{11} \approx 419{,}44$ en $u_{12} \approx 419{,}60 \Rightarrow$ vanaf de 13^e term.

3c Nee, u_n nadert tot 419,7617696... en bereikt de 420 nooit.



4a $u_6 \approx 30{,}79$ en $u_7 \approx 31{,}76$.

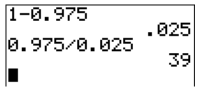
4b $u_{10} \approx 34{,}67$ en $u_{11} \approx 35{,}64 \Rightarrow$ vanaf de 12^e term.



4c $u_n = u_{n-1} + \dfrac{u_{n-1}}{1+u_{n-1}} \Rightarrow u_n - u_{n-1} = \dfrac{u_{n-1}}{1+u_{n-1}}$

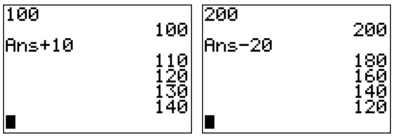
dus $\dfrac{u_{n-1}}{1+u_{n-1}} > 0{,}975 \Rightarrow u_{n-1} > 0{,}975 \cdot (1+u_{n-1}) \Rightarrow u_{n-1} > 0{,}975 + 0{,}975 \cdot u_{n-1} \Rightarrow 0{,}025 \cdot u_{n-1} > 0{,}975 \Rightarrow u_{n-1} > 39$

$u_{14} \approx 38{,}56$ en $u_{15} \approx 39{,}53 \Rightarrow$ vanaf $n - 1 = 15 \Rightarrow$ vanaf $n = 16$.



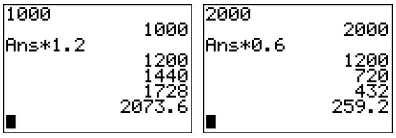
5a $u_n = u_{n-1} + 10$ met $u_0 = 100$.
(er komt steeds 10 bij en de beginterm is 100)

5b $u_n = u_{n-1} - 20$ met $u_0 = 200$.
(er gaat steeds 20 af en de beginterm is 200)



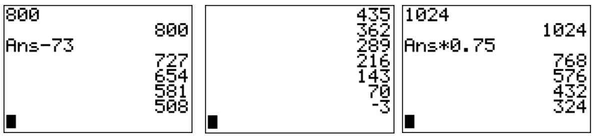
5c $u_n = 1{,}2 \cdot u_{n-1}$ met $u_0 = 1000$.
(er wordt steeds met 1,2 vermenigvuldigd en de beginterm is 1000)

5d $u_n = 0{,}6 \cdot u_{n-1}$ met $u_0 = 2\,000$.
(er wordt steeds met 0,6 vermenigvuldigd en de beginterm is 2000)



6a Er zijn 11 positieve termen ($800 - 10 \times 73 > 0$ en $800 - 11 \times 73 < 0$).

6b Er zijn 17 termen groter dan 10. (ga dit zelf na)



7a Elke term is de som van de termen ervoor. De volgende term is $21 + 34 = 55$.

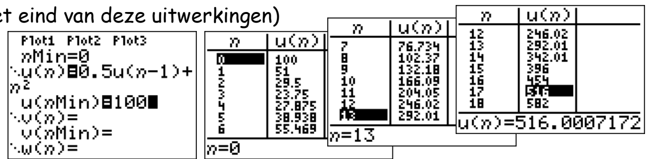
7b Op het basischerm kun je alleen het laatste (en geen voorlaatste) antwoord van een berekening met Ans opvragen.

✱✱✱ **Neem GR - practicum 6 door.** (zie aan het eind van deze uitwerkingen)

8a De kleinste term (TABLE) is u_3.

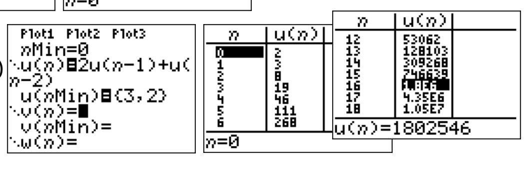
8b De achtste term $u_7 \approx 76{,}73$ (TABLE).

8c $u_n > 500$ (TABLE) $\Rightarrow n \geq 17 \Rightarrow$ vanaf 18^e term.



9a $u_0 = 2,\ u_1 = 3,\ u_2 = 8,\ u_3 = 19,\ u_4 = 46$ en $u_5 = 111$. (TABLE)

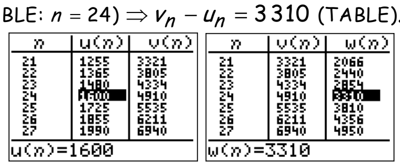
9b $u_n > 1\,000\,000$ (TABLE) $\Rightarrow n \geq 16 \Rightarrow$ vanaf 17^e term.

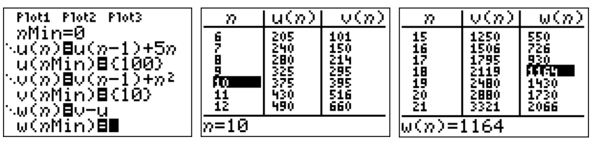


10a $v_n > u_n$ (TABLE) $\Rightarrow n \geq 10 \Rightarrow$ vanaf $n = 10$.

10b $v_n - u_n > 1000$ (TABLE) $\Rightarrow n \geq 18 \Rightarrow$ vanaf $n = 18$.

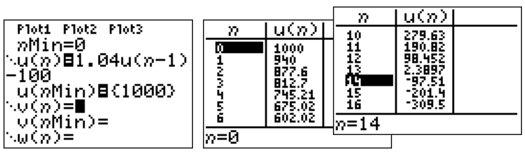
10c $u_n = 1600$ (TABLE: $n = 24$) $\Rightarrow v_n - u_n = 3\,310$ (TABLE).





11a $u_n = 1{,}04 \cdot u_{n-1} - 100$ (nadat €100 is opgenomen) met $u_0 = 1000$.

11b $u_n < 0$ (TABLE) $\Rightarrow n \geq 14 \Rightarrow$ voor het eerst op 1-1-2021.



12a $H_n = 1{,}08 \cdot H_{n-1} - 30$ met $H_0 = 275$.

12b $H_n < 150$ (TABLE) $\Rightarrow n \geq 11 \Rightarrow$ voor het eerst op 1-7-2019.

12c 8% van 275 is $0{,}08 \cdot 275 = 22 \Rightarrow$ elk jaar 22 Schotse hooglanders verplaatsen.

13a $B_n = 1{,}035 \cdot B_{n-1} - 500$ (nadat € 500 is opgenomen) met $B_0 = 17\,500$.

13b Bij 1-1-2015 hoort $n = 8$ (TABLE) $\Rightarrow B_8 \approx 18\,518{,}31$ (€).

13c $B_n \geq 20\,000$ (TABLE) $\Rightarrow n \geq 17 \Rightarrow$ voor het eerst 1-1-2024.

13d 3,5% van 17 500 is 612,50 $\Rightarrow$ elk jaar 612,50 (€) op te nemen op dat het saldo 17 500 (€) blijft.

14a $u_n = 1{,}04 \cdot u_{n-1} - 1000$ met $u_0 = 10\,000$.

14b $n = 10$ (TABLE) $\Rightarrow u_{10} \approx 2\,796{,}34$ (€).

14c $u_n < 0$ (TABLE) $\Rightarrow n \geq 14 \Rightarrow u_{14} \approx -975{,}15$ (€).
Op 1-1-2020 is de schuld afgelost. Hij heeft dan in totaal $14 \times 1\,000 - 975{,}15 = 13\,024{,}85$ (€) terugbetaald.

15a $u_0 = 20,\ u_1 = 26,\ u_2 = 32,\ u_3 = 38$ en $u_4 = 44$. (TABLE)

15b $a = 20$ en $b = 6$.

15c $u_n = 20 + 6n \Rightarrow u_{25} = 20 + 6 \cdot 25 = 170$.

16a Het verschil van twee opeenvolgende termen is steeds $+5 \Rightarrow$ een rekenkundige rij.

16b Recursieve formule: $u_n = u_{n-1} + 5$ met $u_0 = 13$ en directe formule: $u_n = 13 + 5 \cdot n$ voor $n \geq 0$.

16c De vijftigste term is $u_{49} = 13 + 5 \cdot 49 = 258$.

16d $u_n = 633 \Rightarrow 13 + 5 \cdot n = 633 \Rightarrow 5 \cdot n = 620 \Rightarrow n = 124$. Dus de 125^e term is 633.

17a Directe formule: $u_n = 1023 - 7 \cdot n$ voor $n \geq 0$.
$u_n = 246 \Rightarrow 1023 - 7 \cdot n = 246 \Rightarrow -7 \cdot n = -777 \Rightarrow n = 111 \Rightarrow$ de 112^e term is 246.

17b $u_n < 0 \Rightarrow 1023 - 7 \cdot n < 0 \Rightarrow -7 \cdot n < -1023 \Rightarrow n > 146{,}1... \Rightarrow$ de eerste 147 term zijn positief.

18a Als je deze getallen twee keer bij elkaar optelt krijg je $100 \cdot 101 \Rightarrow 1 + 2 + 3 + ... + 100 = \frac{1}{2} \cdot 100 \cdot 101$.

18b $1 + 2 + 3 + ... + 50 = \frac{1}{2} \cdot 50 \cdot 51 = 1275$.

19a rr met $u_0 = 3 \cdot 0 + 4 = 4$ en $u_{50} = 3 \cdot 50 + 4 = 154$. $\sum_{k=0}^{50} (3k + 4) = \frac{1}{2} \cdot 51 \cdot (4 + 154) = 4\,029$.

19b rr met $u_0 = 100 - 2 \cdot 0 = 100$ en $u_{40} = 100 - 2 \cdot 40 = 20$. $\sum_{k=0}^{40} (100 - 2k) = \frac{1}{2} \cdot 41 \cdot (100 + 20) = 2\,460$.

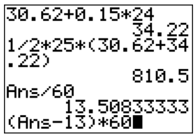
19c rr met $u_5 = 6 \cdot 5 - 12 = 18$ en $u_{30} = 6 \cdot 30 - 12 = 168$. $\sum_{k=5}^{30} (6k - 12) = \frac{1}{2} \cdot 26 \cdot (18 + 168) = 2\,418$.

19d rr met $u_{12} = 150 - 3 \cdot 12 = 114$ en $u_{36} = 150 - 3 \cdot 36 = 42$. $\sum_{k=12}^{36} (150 - 3k) = \frac{1}{2} \cdot 25 \cdot (114 + 42) = 1950$.

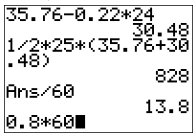
20a rr met $u_0 = 12$ en $v = 4 \Rightarrow u_n = 12 + 4 \cdot n$.
$u_n = 12 + 4 \cdot n = 152 \Rightarrow 4 \cdot n = 140 \Rightarrow n = 35$.
$12 + 16 + 20 + 24 + ... + 152 = \frac{1}{2} \cdot 36 \cdot (12 + 152) = 2\,952$.

20b rr met $u_0 = 100$ en $v = -3 \Rightarrow u_n = 100 - 3 \cdot n$.
$u_n = 100 - 3 \cdot n > 0 \Rightarrow -3 \cdot n > -100 \Rightarrow n > 33{,}3...$
$u_{33} = 100 - 3 \cdot 33 = 1 \Rightarrow 100 + 97 + 94 + ... + 1 = \frac{1}{2} \cdot 34 \cdot (100 + 1) = 1\,717$.

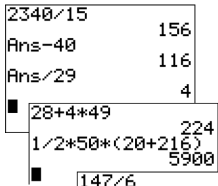
20c rr met $u_0 = 18$ en $v = 7 \Rightarrow$ directe formule: $u_n = 18 + 7n$.
25^e term is $u_{24} = 18 + 7 \cdot 24 = 186 \Rightarrow \sum_{k=0}^{24} (18 + 7k) = \frac{1}{2} \cdot 25 \cdot (18 + 186) = 2\,550$.



21a rr met $u_0 = 30{,}62$ en $v = 0{,}15 \Rightarrow u_n = 30{,}62 + 0{,}15 \cdot n$.
Het laatste rondje duurt $u_{24} = 30{,}62 + 0{,}15 \cdot 24 = 34{,}22$ sec.
De eindtijd van Carl is $\frac{1}{2} \cdot 25 \cdot (30{,}62 + 34{,}22) = 810{,}50$ sec. Dit is 13 minuten en 30,50 sec.



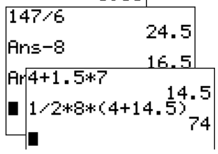
21b rr met $u_0 = 35{,}76$ en $v = -0{,}22 \Rightarrow u_n = 35{,}76 - 0{,}22 \cdot n$.
Het laatste rondje duurt $u_{24} = 35{,}76 - 0{,}22 \cdot 24 = 30{,}48$ sec.
De eindtijd van Sven is $\frac{1}{2} \cdot 25 \cdot (35{,}76 + 30{,}48) = 828$ sec. Dit is 13 minuten en 48 sec.



22a rr met $u_0 = 20$ en $v = ... \Rightarrow u_n = 20 + v \cdot n \Rightarrow$ de 30^e term is $u_{29} = 20 + v \cdot 29$.
De som is dus $\frac{1}{2} \cdot 30 \cdot (20 + 20 + 29v) = 15 \cdot (40 + 29v) = 2\,340$.

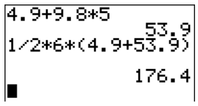
22b $15 \cdot (40 + 29v) = 2\,340 \Rightarrow 40 + 29v = 156 \Rightarrow 29v = 116 \Rightarrow v = 4$.

22c $u_0 = 20$ en de 50^e term is $u_{49} = 20 + 4 \cdot 49 = 216$. De som is $\frac{1}{2} \cdot 50 \cdot (20 + 216) = 5\,900$.



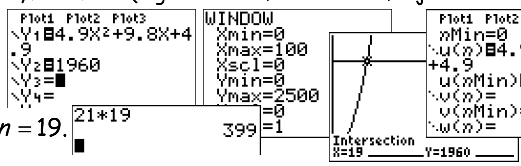
23 De afstanden per seconde vormen een rr met $u_0 = 4$ en $v = ... \Rightarrow$ de 12^e term is $u_{11} = 4 + v \cdot 11$.
De afstand na 12 seconden is $\frac{1}{2} \cdot 12 \cdot (4 + 4 + 11v) = 6 \cdot (8 + 11v) = 147$.
$6 \cdot (8 + 11v) = 147 \Rightarrow 8 + 11v = 24{,}5 \Rightarrow 11v = 16{,}5 \Rightarrow v = 1{,}5$.
8^e term (de afstand in de 7^e seconde) is $u_7 = 4 + 1{,}5 \cdot 7 = 14{,}5$ m. De afstand na 8 seconden is $\frac{1}{2} \cdot 8 \cdot (4 + 14{,}5) = 74$ m.

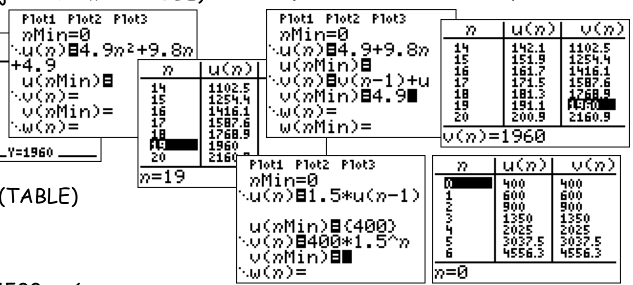
24a De valafstanden per seconde vormen een rr met (valafstand in 1^e seconde) $u_0 = 4{,}9$ en (verschil) $v = 9{,}8$.
De valafstand in de 6^e seconde is $u_5 = 4{,}9 + 9{,}8 \cdot 5 = 53{,}9$.
De valafstand na 6 seconden is $\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot (4{,}9 + 53{,}9) = 176{,}4$ m.



24b $u_n = 4{,}9 + 9{,}8 \cdot n$ voor $n \geq 0 \Rightarrow S_n = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_n = \frac{1}{2} \cdot (n+1) \cdot (4{,}9 + 4{,}9 + 9{,}8 \cdot n)$
$= \frac{1}{2} \cdot (n+1) \cdot (9{,}8 + 9{,}8n) = 4{,}9n + 4{,}9n^2 + 4{,}9 + 4{,}9n = 4{,}9n^2 + 9{,}8n + 4{,}9$ voor $n \geq 0$.

24c $S_n = 4{,}9n^2 + 9{,}8n + 4{,}9 = 1960$ (algebraïsch of intersect of rijenscherm en TABLE) $\Rightarrow n = 19 \Rightarrow$ na 20 seconden.
$n^2 + 2n + 1 = 400$
$n^2 + 2n - 399 = 0$
$(n + 21) \cdot (n - 19) = 0$
$n = -21$ (vold. niet) $\vee$ $n = 19$.





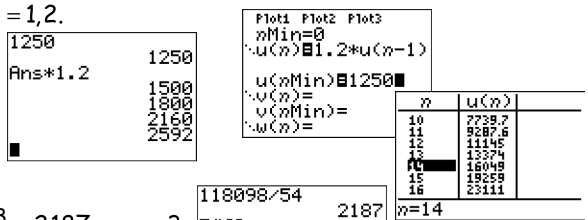
25a $u_0 = 400$, $u_1 = 600$, $u_2 = 900$, $u_3 = 1350$ en $u_4 = 2\,025$. (TABLE)

25b $a = 400$ en $b = 1{,}5$.

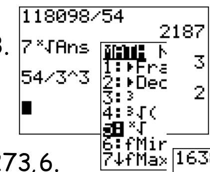
26a De factor tussen twee opeenvolgende termen is steeds $\frac{1500}{1250} = \frac{6}{5} = 1{,}2$.

26b recursieve formule: $u_n = u_{n-1} \cdot 1{,}2$ met $u_0 = 1250$.
directe formule: $u_n = 1250 \cdot 1{,}2^n$ voor $n \geq 0$.

26c $u_n > 15\,000$ (TABLE) $\Rightarrow n \geq 14 \Rightarrow$ vanaf de 15^e term.

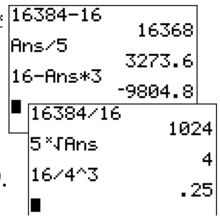


27 mr: $u_n = u_0 \cdot r^n$ met $u_3 = 54$ en $u_{10} = 118\,098 \Rightarrow r^7 = \frac{u_{10}}{u_3} = \frac{118098}{54} = 2187 \Rightarrow r = 3$.
mr: $u_n = u_0 \cdot 3^n$ met $u_3 = 54 \Rightarrow 54 = u_0 \cdot 3^3 \Rightarrow u_0 = 2 \Rightarrow$ mr: $u_n = 2 \cdot 3^n$ voor $n \geq 0$.



28a rr: $u_n = u_0 + v \cdot n$ met $u_3 = 16$ en $u_8 = 16\,384 \Rightarrow 5v = 16\,384 - 16 = 16\,368 \Rightarrow v = 3273{,}6$.
rr: $u_n = u_0 + 3273{,}6 \cdot n$ met $u_3 = 16 \Rightarrow 16 = u_0 + 3273{,}6 \cdot 3 \Rightarrow u_0 = -9\,804{,}8$.
rr: $u_n = -9\,804{,}8 + 3273{,}6 \cdot n$ voor $n \geq 0$.

28b mr: $u_n = u_0 \cdot r^n$ met $u_3 = 16$ en $u_8 = 16\,384 \Rightarrow r^5 = \frac{u_8}{u_3} = \frac{16384}{16} = 1024 \Rightarrow r = 4$.
mr: $u_n = u_0 \cdot 4^n$ met $u_3 = 16 \Rightarrow 16 = u_0 \cdot 4^3 \Rightarrow u_0 = \frac{1}{4} \Rightarrow$ mr: $u_n = \frac{1}{4} \cdot 4^n (= 4^{-1} \cdot 4^n = 4^{n-1})$ voor $n \geq 0$.



29 Een mr heeft te maken met een exponentiële groei en een rr met een lineaire groei.

30a Pythagoras in ΔAPS ($\angle A = 90°$): $AP^2 + AS^2 = PS^2 \Rightarrow 4^2 + 8^2 = PS^2 \Rightarrow 80 = PS^2 \Rightarrow PS = \sqrt{80} \Rightarrow r = \frac{PS}{AB} = \frac{\sqrt{80}}{12}$.

30b mr: $u_n = u_0 \cdot r^n$ met $u_0 = 12$ en $r = \frac{\sqrt{80}}{12} \Rightarrow u_n = 12 \cdot (\frac{\sqrt{80}}{12})^n$ voor $n \geq 0$.

30c $u_n < 1$ (TABLE) $\Rightarrow n \geq 9 \Rightarrow$ vanaf het 10^e vierkant.

30d $v_n = (u_n)^2 \Rightarrow v_n = \left(12 \cdot (\frac{\sqrt{80}}{12})^n\right)^2 = 144 \cdot \left((\frac{\sqrt{80}}{12})^2\right)^n = 144 \cdot (\frac{80}{144})^n = 144 \cdot (\frac{5}{9})^n$ voor $n \geq 0$.

30e $1\ \text{mm}^2 = 0{,}01\ \text{cm}^2$. Dus $v_n < 0{,}01$ (TABLE) $\Rightarrow n \geq 17 \Rightarrow$ vanaf het 18^e vierkant.

31 $-2 \cdot S_n = 15 - 2\,657\,205 \Rightarrow S_n = \frac{15 - 2657205}{-2} = 1\,328\,595.$

32a $\sum_{k=0}^{11} (0{,}001 \cdot 2^k) = \frac{0{,}001 \cdot (1 - 2^{12})}{1-2} = 4{,}095.$

32b $\sum_{k=0}^{20} (100 \cdot 0{,}8^k) = \frac{100 \cdot (1 - 0{,}8^{21})}{1 - 0{,}8} \approx 495{,}39.$

32c $\sum_{k=5}^{18} (200 \cdot 1{,}1^k) = \frac{200 \cdot 1{,}1^5 \cdot (1 - 1{,}1^{14})}{1 - 1{,}1} \approx 9\,011.$

32d mr met $u_0 = 600$ en $r = 0{,}75$.
$\sum_{k=0}^{14} (600 \cdot 0{,}75^k) = \frac{600 \cdot (1 - 0{,}75^{15})}{1 - 0{,}75} \approx 2\,367{,}9.$

33a mr met $u_0 = 2\,000$ en $r = 1{,}5 \Rightarrow u_{n+1} = 34\,171{,}875 \cdot 1{,}5 = 51\,257{,}8125 \Rightarrow$ som $= \frac{2000 - 51257{,}8125}{1 - 1{,}5} = 98\,515{,}625.$

33b mr met $u_0 = 1{,}06$ en $r = 1{,}06 \Rightarrow 1{,}06 + 1{,}06^2 + 1{,}06^3 + 1{,}06^4 + \ldots + 1{,}06^{12} = \frac{1{,}06 - 1{,}06^{13}}{1 - 1{,}06} \approx 17{,}882.$

33c mr met $u_0 = 1$ en $r = 1{,}5 \Rightarrow 1 + 1{,}5 + 1{,}5^2 + 1{,}5^3 + \ldots + 1{,}5^{20} = \frac{1 - 1{,}5^{21}}{1 - 1{,}5} \approx 9\,973{,}770.$

33d mr met $u_0 = 1{,}2$ en $r = -1{,}2 \Rightarrow 1{,}2 - 1{,}2^2 + 1{,}2^3 - 1{,}2^4 + \ldots - 1{,}2^{24} = \frac{1 - 1{,}2^{25}}{1 - -1{,}2} \approx -42{,}816.$

34a $u_n = 20 \cdot 1.1^n$ voor $n \geq 0$.

34b $u_n > 42$ (TABLE) $\Rightarrow n \geq 8$. Dus voor het eerst bij de 9^e duurloop.
Hij heeft dan in totaal $\sum_{k=0}^{8} (20 \cdot 1{,}1^k) = \frac{20 \cdot (1 - 1{,}1^9)}{1 - 1{,}1} \approx 272$ km afgelegd.

35 De omzet per jaar wordt gegeven door $u_n = 11{,}3 \cdot 1.074^n$ met $n = 0$ in 1995.
Bij 2007 hoort $n = 12 \Rightarrow$ totale omzet $= \sum_{k=0}^{12} (11{,}3 \cdot 1.074^k) = \frac{11{,}3 \cdot (1 - 1{,}074^{13})}{1 - 1{,}074} \approx 233{,}6$ miljard dollar.

36a $5{,}2 \cdot 0.8^7 \approx 1{,}1$ (cm) $\Rightarrow$ de toename in de 8^e week is (ongeveer) 11 mm.

36b $5{,}2 + 5{,}2 \cdot 0{,}8 + 5{,}2 \cdot 0{,}8^2 + 5{,}2 \cdot 0{,}8^3 + \ldots + 5{,}2 \cdot 0{,}8^7 = \frac{5{,}2 \cdot (1 - 0{,}8^8)}{1 - 0{,}8} \approx 21{,}6$ (cm).
De plant is in de eerste 8 weken (ongeveer) 216 mm gegroeid.

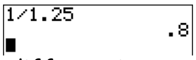
36c $5{,}2 + 5{,}2 \cdot 0{,}8 + 5{,}2 \cdot 0{,}8^2 + 5{,}2 \cdot 0{,}8^3 + \ldots + 5{,}2 \cdot 0{,}8^9 = \frac{5{,}2 \cdot (1 - 0{,}8^{10})}{1 - 0{,}8} \approx 23{,}2$ (cm).
De hoogte van de plant na 10 weken is (ongeveer) $18 + 23{,}2 = 41{,}2$ cm.

37a rr $u_n = 100 + 15n$ voor $n \geq 0 \Rightarrow S_n = \sum_{k=0}^{n} (100 + 15k) = \frac{1}{2} \cdot (n+1) \cdot (100 + 100 + 15n) = \frac{1}{2} \cdot (n+1) \cdot (200 + 15n)$ voor $n \geq 0$.
mr $v_n = 10 \cdot 1{,}5^n$ voor $n \geq 0 \Rightarrow T_n = \sum_{k=0}^{n} (10 \cdot 1{,}5^k) = \frac{10 \cdot (1 - 1{,}5^{n+1})}{1 - 1{,}5} = \frac{10 - 10 \cdot 1{,}5^{n+1}}{-0{,}5} = -20 + 20 \cdot 1{,}5^{n+1}$ voor $n \geq 0$.

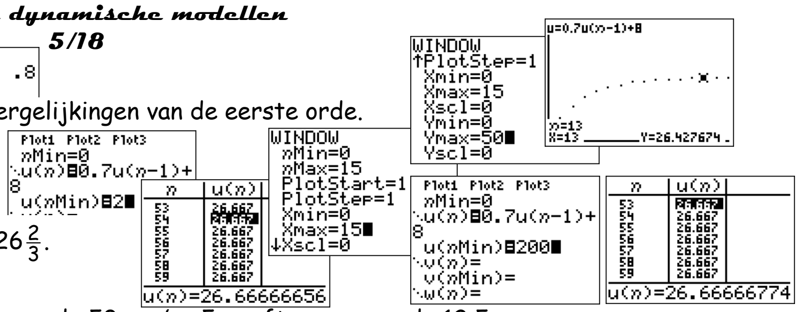
37b $T_n > S_n$ (TABLE) $\Rightarrow n \geq 11$.

38 Bij deze situatie horen de formules:
$K_n = 1{,}038 \cdot K_{n-1} - 150$ met $K_0 = 5\,000$ en $K_n - K_{n-1} = 0{,}038 \cdot K_{n-1} - 150$ met $K_0 = 5\,000$.
$(K_n = 1{,}038 \cdot K_{n-1} - 150 \Rightarrow K_n = 1 \cdot K_{n-1} + 0{,}038 \cdot K_{n-1} - 150 \Rightarrow K_n - K_{n-1} = 0{,}038 \cdot K_{n-1} - 150)$

*** **Neem GR - practicum 7A door.** (zie aan het eind van deze uitwerkingen)



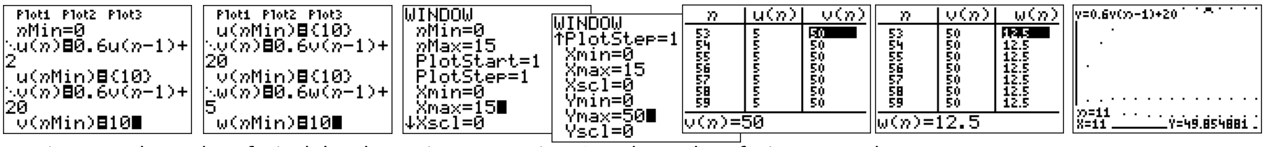
39 39a, 39c, 39e en 39f zijn lineaire differentievergelijkingen van de eerste orde.



40a Zie de schermen hiernaast. u_n nadert tot $26\frac{2}{3}$.

40b Bij een andere startwaarde nadert u_n ook tot $26\frac{2}{3}$.

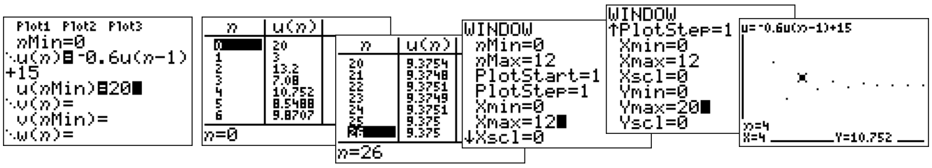
41a $b = 2$ geeft grenswaarde 5; $b = 20$ geeft grenswaarde 50 en $b = 5$ geeft grenswaarde 12,5.



41b Bij $b = 2$ is de tijdgrafiek dalend. Bij $b = 20$ en $b = 5$ is de tijdgrafiek stijgend.

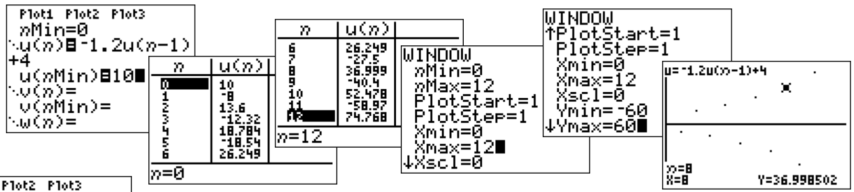
42a u_n nadert tot $9{,}375 \approx 9{,}4$.

42b De stippen van de tijdgrafiek liggen om en om boven en onder de grenswaarde.

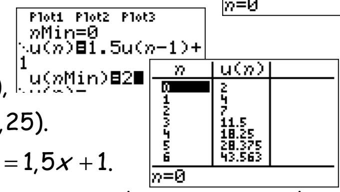


43a u_n nadert niet tot een grenswaarde.

43b De termen van u_n zijn om en om positief en negatief. De positieve termen worden steeds groter en de negatieve termen steeds kleiner.



44a Zie de tabel hiernaast.



$u_0 = 2$	$u_1 = 4$	$u_2 = 7$	$u_3 = 11{,}5$	$u_4 = 18{,}25$
$u_1 = 4$	$u_2 = 7$	$u_3 = 11{,}5$	$u_4 = 18{,}25$	$u_5 = 28{,}375$

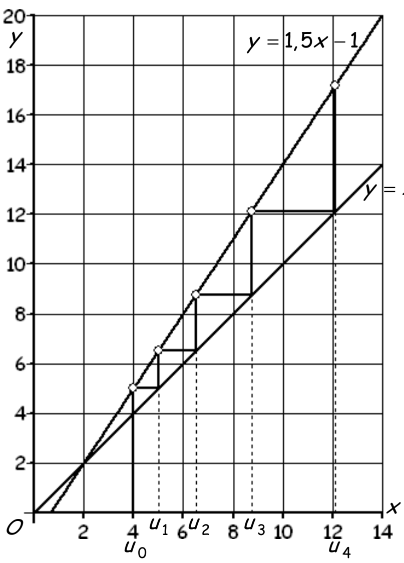
44b Uit de 3^e kolom volgt (7; 11,5), uit de 4^e kolom volgt (11,5; 18,25).

44c Alle punten liggen op de lijn $y = 1{,}5x + 1$.

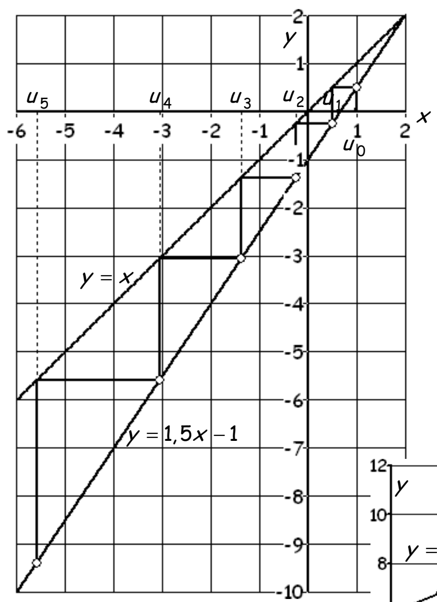
44d Je moet u_n in $u_n = 1{,}5u_{n-1} + 1$ vervangen door y en u_{n-1} door x.

44e Ja, want als je u_n door y en u_{n-1} door x vervangt, krijg je steeds $y = 1{,}5x + 1$.

45a



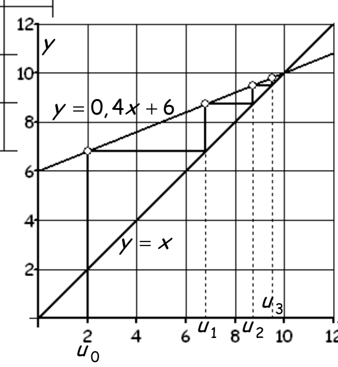
45b

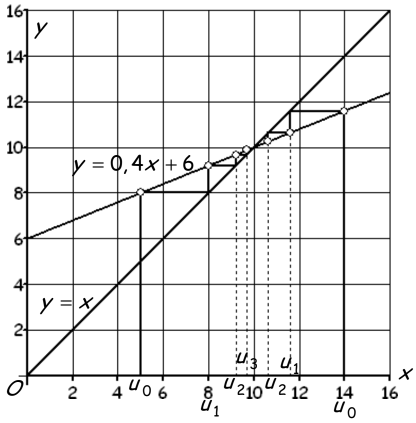


45c De webgrafiek bestaat enkel uit het punt (2, 2).
De rij u_n is de constante rij $u_n = 2$ (voor elke n).

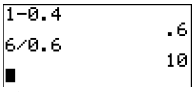
46a Zie de webgrafiek hiernaast.

46b De lijnstukken komen steeds dichter bij elkaar te liggen en naderen het snijpunt van $y = x$ en $y = 0{,}4x + 6$.



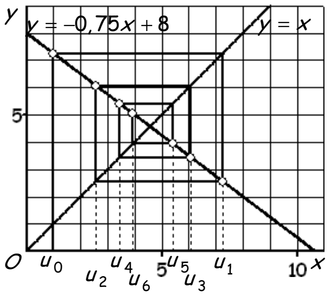


46c $\quad x = 0{,}4x + 6$
$0{,}6x = 6$
$x = 10.$
De grenswaarde is 10.



46de $\quad$ Zie de webgrafiek hiernaast.
De grenswaarde is 10 vanwege dezelfde reden als bij 46b.

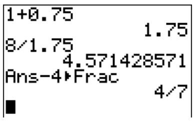
46f $\quad$ Voor $u_n < 10$ gaan de lijnstukjes van de webgrafiek stijgend naar (10,10) en voor $u_n > 10$ dalend naar (10,10).
Voor $u_n = 10$ krijg je de constante rij $u_0 = 10,\ u_1 = 10,\ u_2 = 10,\ \ldots$
Dus voor elke u_n is de grenswaarde gelijk aan 10.

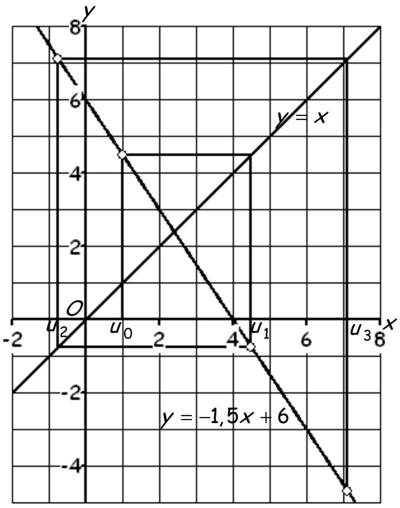


47a $\quad u_n = -0{,}75 \cdot u_{n-1} + 8$ met $u_0 = 1.$

47b $\quad$ Maak in je werkboek de webgrafiek hiernaast.

47c $\quad x = -0{,}75x + 8$
$1{,}75x = 8$
$x = 4\frac{4}{7}.$
De grenswaarde is $4\frac{4}{7}$.





48a $\quad$ De differentievergelijking $u_n = -1{,}5 \cdot u_{n-1} + 6$ met $u_0 = 1.$

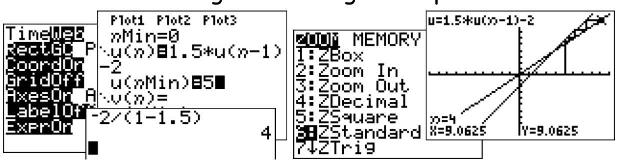
48b $\quad$ Maak in je werkboek de webgrafiek hiernaast.

48c $\quad$ Nee, de punten komen steeds verder van het snijpunt van de lijnen $y = -1{,}5x + 6$ en $y = x$ af te liggen.

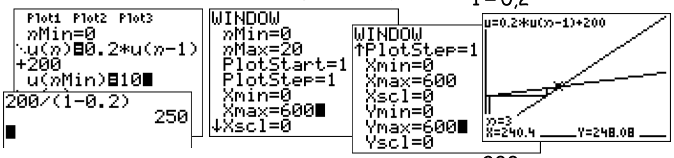
48d $\quad$ De webgrafiek bestaat uitsluitend uit het punt (2,4; 2,4), want dit is het snijpunt van de lijnen $y = -1{,}5x + 6$ en $y = x$.

✲✲✲ **Neem GR - practicum 7B door.** (zie aan het eind van deze uitwerkingen)

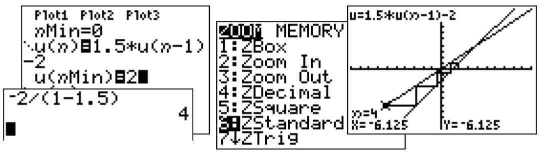
49a $\quad$ Er treedt geen convergentie op.



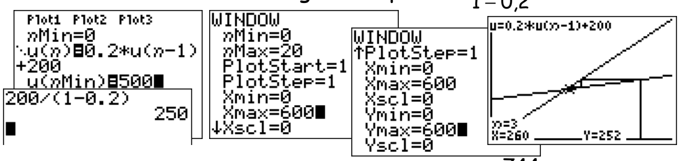
49d $\quad$ Er treedt convergentie op. $\bar{u} = \frac{200}{1 - 0{,}2} = 250.$



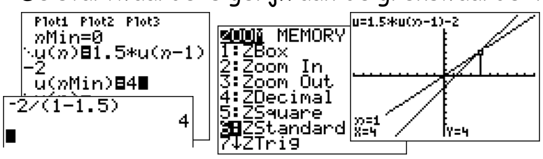
49b $\quad$ Er treedt geen convergentie op.



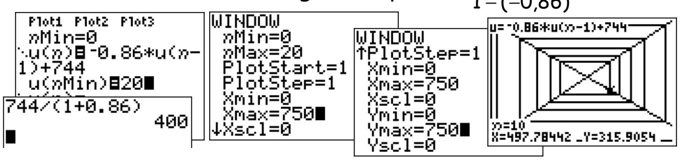
49e $\quad$ Er treedt convergentie op. $\bar{u} = \frac{200}{1 - 0{,}2} = 250.$



49c $\quad$ De startwaarde is gelijk aan de grenswaarde 4.



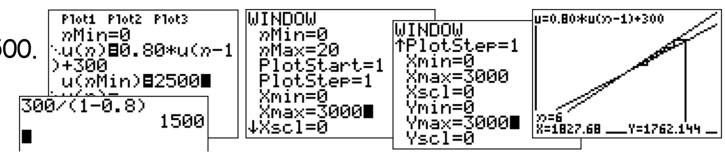
49f $\quad$ Er treedt convergentie op. $\bar{u} = \frac{744}{1 - (-0{,}86)} = 400.$



50a $\quad$ De groeifactor per jaar is $1 - 0{,}2 = 0{,}8.$
Je krijgt: $A_n = 0{,}8 \cdot A_{n-1} + 300$ met $A_0 = 2500.$

50b $\quad$ De rij A_n convergeert (zie de webgrafiek).

50c $\quad \bar{A} = \frac{300}{1 - 0{,}8} = 1500$ (dennenbomen).



51a $\quad$ Je kunt in de webgrafiek bij elke n de waarde van u_n aflezen op de lijn $y = ax + b$.
In de tijdgrafiek zijn deze punten (n, u_n) ook getekend.

51b $\quad$ Oefen hier in het werkboek zelf mee. (bestudeer voor de aanpak eerst goed figuur 7.13 in het boek)

52a rr $\Rightarrow$ het verschil tussen de opeenvolgende termen is constant $\Rightarrow a = 1$. (voor b zijn er geen voorwaarden)

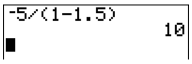
52b mr $\Rightarrow$ het quotiënt van twee opeenvolgende termen is constant $\Rightarrow b = 0$ en $a \neq 0$.

53a $u_n = 1{,}05 \cdot u_{n-1} + 500$ met $u_0 = 750$. 53b $u_3 = 1{,}05^3 \cdot 750 + 1{,}05^2 \cdot 500 + 1{,}05 \cdot 500 + 500$.

53c $u_6 = 1{,}05^6 \cdot 750 + 1{,}05^5 \cdot 500 + 1{,}05^4 \cdot 500 + 1{,}05^3 \cdot 500 + 1{,}05^2 \cdot 500 + 1{,}05 \cdot 500 + 500$.

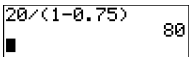
53d factor $= 1{,}05$ en beginterm $= 500$.

54a Directe formule: $u_n = \overline{u} + a^n \cdot (u_0 - \overline{u})$ met $\overline{u} = \frac{b}{1-a} = \frac{-5}{1-1{,}5} = \frac{-5}{-0{,}5} = 10$.



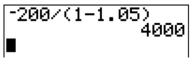
Dus $u_n = 10 + 1{,}5^n \cdot (30 - 10) = 10 + 20 \cdot 1{,}5^n$ voor $n \geq 0$.

54b Directe formule: $x_n = \overline{x} + a^n \cdot (x_0 - \overline{x})$ met $\overline{x} = \frac{b}{1-a} = \frac{20}{1-0{,}75} = \frac{20}{0{,}25} = 80$.



Dus $x_n = 80 + 0{,}75^n \cdot (100 - 80) = 80 + 20 \cdot 0{,}75^n$ voor $n \geq 0$.

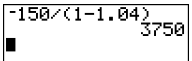
54c Directe formule: $K_n = \overline{K} + a^n \cdot (K_0 - \overline{K})$ met $\overline{K} = \frac{b}{1-a} = \frac{-200}{1-1{,}05} = \frac{-200}{-0{,}05} = 4\,000$.



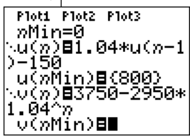
Dus $K_n = 4\,000 + 1{,}05^n \cdot (1\,000 - 4\,000) = 4\,000 - 3\,000 \cdot 1{,}05^n$ voor $n \geq 0$.

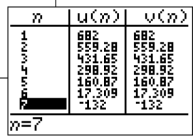
55a Differentiaalvergelijking: $K_n = 1{,}04 \cdot K_{n-1} - 150$ met $K_0 = 800$.

55b Directe formule: $K_n = \overline{K} + a^n \cdot (K_0 - \overline{K})$ met $\overline{K} = \frac{b}{1-a} = \frac{-150}{1-1{,}04} = \frac{-150}{-0{,}04} = 3\,750$.



Dus $K_n = 3\,750 + 1{,}04^n \cdot (800 - 3\,750) = 3\,750 - 2\,950 \cdot 1{,}04^n$ voor $n \geq 0$.

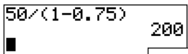




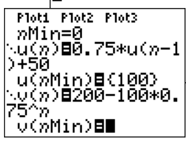
55c $K_n < 0$ (TABLE) $\Rightarrow n \geq 7$ (bij beide formules) $\Rightarrow$ voor het eerst op 1-1-2013.
Ze kan op 1-1-2013 wel nog $150 - 132 = 18$ euro opnemen.

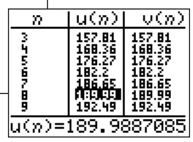
56a Differentiaalvergelijking: $A_n = 0{,}75 \cdot A_{n-1} + 50$ met $A_0 = 100$.

56b Directe formule: $A_n = \overline{A} + a^n \cdot (A_0 - \overline{A})$ met $\overline{A} = \frac{b}{1-a} = \frac{50}{1-0{,}75} = \frac{50}{0{,}25} = 200$.



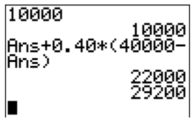
Dus $A_n = 200 + 0{,}75^n \cdot (100 - 200) = 200 - 100 \cdot 0{,}75^n$ voor $n \geq 0$.





56c Na 32 uur is $n = 8 \Rightarrow A_8 = 200 - 100 \cdot 0{,}75^8 \approx 190$ (mg).

56d Ja, $\overline{A} = 200$. (want A_8 ligt dichter bij $\overline{A}$ dan A_0, of bekijk een webgrafiek)

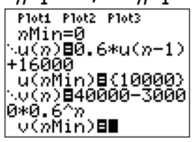


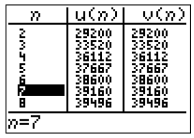
57a Om 7:00 uur 10 000 mensen. Om 7:30 uur $10\,000 + 0{,}40 \cdot (40\,000 - 10\,000) = 22\,000$ mensen.
Om 8:00 uur $22\,000 + 0{,}40 \cdot (40\,000 - 22\,000) = 29\,200$ mensen. Dus 29 200 mensen.

57b Differentiaalvergelijking: $P_n = P_{n-1} + 0{,}4 \cdot (40\,000 - P_{n-1}) = P_{n-1} + 16\,000 - 0{,}4 \cdot P_{n-1} = 0{,}6 \cdot P_{n-1} + 16\,000$.

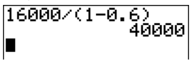
57c Directe formule: $P_n = \overline{P} + a^n \cdot (P_0 - \overline{P})$ met $\overline{P} = \frac{b}{1-a} = \frac{16000}{1-0{,}6} = \frac{16000}{0{,}4} = 40\,000$.

Dus $P_n = 40\,000 + 0{,}6^n \cdot (10\,000 - 40\,000) = 40\,000 - 30\,000 \cdot 0{,}6^n$ voor $n \geq 0$.

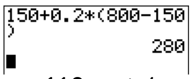


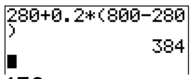


57d $P_n > 39000$ (TABLE) $\Rightarrow n \geq 7 \Rightarrow$ voor het eerst voor $n = 7$.



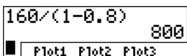
58a $L_0 = 150$; $L_1 = 150 + 0{,}2 \cdot (800 - 150) = 280$ en $L_2 = 280 + 0{,}2 \cdot (800 - 280) = 384$.



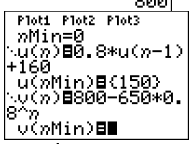


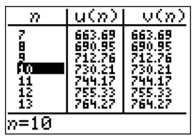
58b $L_n = L_{n-1} + 0{,}2 \cdot (800 - L_{n-1})$ met $L_0 = 150$ of $L_n = L_{n-1} + 160 - 0{,}2 \cdot L_{n-1} = 0{,}8 \cdot L_{n-1} + 160$ met $L_0 = 150$.

58c Directe formule: $L_n = \overline{L} + a^n \cdot (L_0 - \overline{L})$ met $\overline{L} = \frac{b}{1-a} = \frac{160}{1-0{,}8} = \frac{160}{0{,}2} = 800$.



Dus $L_n = 800 + 0{,}8^n \cdot (150 - 800) = 800 - 650 \cdot 0{,}8^n$ voor $n \geq 0$.





58d $L_n > 0{,}9 \cdot 800 = 720$ (TABLE) $\Rightarrow n \geq 10 \Rightarrow$ na 11 dagen is 90% geringd.

59a De hazenpopulatie zal toenemen omdat er weinig lynxen zijn die op de hazen jagen.
De lynxenpopulatie zal toenemen omdat er veel hazen zijn die als voedsel dienen.

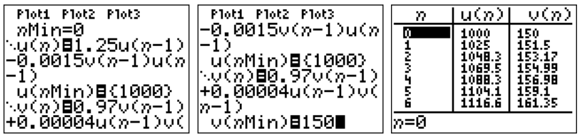
59b De hazenpopulatie zal afnemen en de lynxenpopulatie zal afnemen.

59c Uitgaande van (startend met) weinig lynxen en weinig hazen:
toename aantal hazen ⇨ toename aantal lynxen ⇨ afname aantal hazen ⇨ afname aantal lynxen, enzovoort.

59d Bij beide populaties is de periode 8 jaar. 59e Op $t = 1$ is $H = 10\,000$ en $L = 4\,600$.

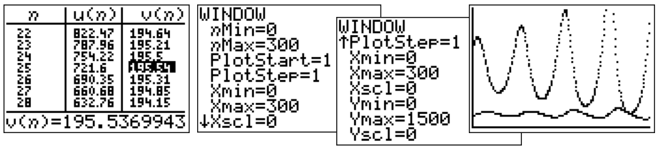
59f
- Hoogste punten in de hazengrafiek (fig. 7.15) bepalen het meest rechtse punt in het prooi-roofdierdiagram (7.16).
- Laagste punten in de lynxengrafiek (fig. 7.15) bepalen het laagste punt in het prooi-roofdierdiagram (fig. 7.16).

60a Op $t = 1$ zijn er 1025 prooidieren en 152 roofdieren.
Op $t = 5$ zijn er 1104 prooidieren en 159 roofdieren.
(zie de schermen hiernaast)

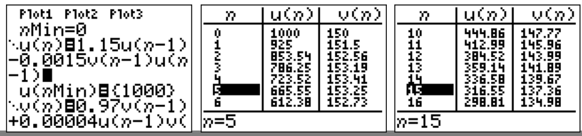


60b Na 25 maanden is het aantal roofdieren maximaal.
Er zijn dan 196 roofdieren. (blader door de tabel)

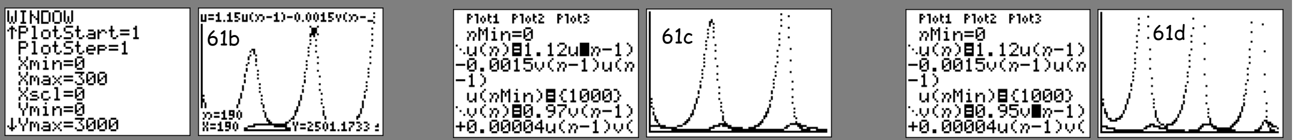
60c 25 jaar zijn $25 \cdot 12 = 300$ maanden.
De populatie bereikt vier keer een maximum.
(bekijk een tijdgrafiek over 300 maanden)



61a Op $t = 5$ zijn er 666 prooidieren en 153 roofdieren.
Op $t = 15$ zijn er 317 prooidieren en 137 roofdieren.
(zie de schermen hiernaast)



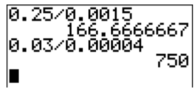
61b Uit de tijdgrafiek blijkt dat na 190 maanden de populatie prooidieren voor de tweede keer maximaal is.
Het maximale aantal is 2501. (het gaat ontzettend traag, de GR loopt voor geen meter)



61c Na het plotten van de tijdgrafiek blijkt dat de eerste bewering niet waar is (de maximale waarden nemen juist toe)
en dat de tweede bewering ook niet waar is (de toppen liggen verder uit elkaar).

61d Deze bewering is ook niet waar.

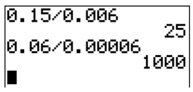
62a $\Delta P = 0 \Rightarrow (0{,}25 - 0{,}0015\overline{R}) \cdot \overline{P} = 0 \Rightarrow 0{,}25 - 0{,}0015\overline{R} = 0 \Rightarrow -0{,}0015\overline{R} = -0{,}25 \Rightarrow \overline{R} \approx 167.$
$\Delta R = 0 \Rightarrow (-0{,}03 + 0{,}00004\overline{P}) \cdot \overline{R} = 0 \Rightarrow -0{,}03 + 0{,}00004\overline{P} = 0 \Rightarrow 0{,}00004\overline{P} = 0{,}03 \Rightarrow \overline{P} = 750.$



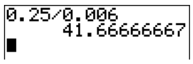
62b De populaties veranderen dan niet meer, dus steeds (voor elke $t \geq 0$) is $P_t = 750$ en $R_t = 167$.

63a $\boxed{\begin{array}{l} P_t = 1{,}15 \cdot P_{t-1} - 0{,}006 \cdot R_{t-1} \cdot P_{t-1} \\ R_t = 0{,}94 \cdot R_{t-1} + 0{,}00006 \cdot P_{t-1} \cdot R_{t-1} \\ \text{met } P_0 = 800 \text{ en } R_0 = 20 \end{array}}$ of $\boxed{\begin{array}{l} P_t = P_{t-1} + \Delta P \text{ met } \Delta P = (0{,}15 - 0{,}006R_{t-1}) \cdot P_{t-1} \\ R_t = R_{t-1} + \Delta R \text{ met } \Delta R = (-0{,}06 + 0{,}00006P_{t-1}) \cdot R_{t-1} \\ \text{met } P_0 = 800 \text{ en } R_0 = 20 \end{array}}$

In de evenwichtssituatie is $P_t = P_{t-1} = \overline{P}$ en $R_t = R_{t-1} = \overline{R} \Rightarrow \Delta P = 0$ en $\Delta R = 0$.
$\Delta P = 0 \Rightarrow (0{,}15 - 0{,}006\overline{R}) \cdot \overline{P} = 0 \Rightarrow 0{,}15 - 0{,}006\overline{R} = 0 \Rightarrow -0{,}006\overline{R} = -0{,}15 \Rightarrow \overline{R} = 25.$
$\Delta R = 0 \Rightarrow (-0{,}06 + 0{,}00006\overline{P}) \cdot \overline{R} = 0 \Rightarrow -0{,}06 + 0{,}00006\overline{P} = 0 \Rightarrow 0{,}00006\overline{P} = 0{,}06 \Rightarrow \overline{P} = 1000.$

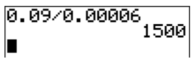


63b $P_t = 1{,}25 \cdot P_{t-1} - 0{,}006 \cdot R_{t-1} \cdot P_{t-1}$ of $P_t = P_{t-1} + \Delta P$ met $\Delta P = (0{,}25 - 0{,}006R_{t-1}) \cdot P_{t-1}$.
In de evenwichtssituatie is $\Delta P = 0$ en $\Delta R = 0$ (zie 63a $\Rightarrow \overline{P} = 1000$).
$\Delta P = 0 \Rightarrow (0{,}25 - 0{,}006\overline{R}) \cdot \overline{P} = 0 \Rightarrow 0{,}25 - 0{,}006\overline{R} = 0 \Rightarrow -0{,}006\overline{R} = -0{,}25 \Rightarrow \overline{R} \approx 42.$



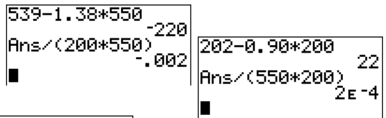
Dus als de vruchtbaarheid van de prooidieren toeneemt, neemt $\overline{R}$ toe en blijft $\overline{P}$ gelijk.

63c Stel dat de natuurlijke sterfte van de roofdieren zo toeneemt, dat de groeivoet $-0{,}09$ wordt.
$R_t = 0{,}91 \cdot R_{t-1} + 0{,}00006 \cdot P_{t-1} \cdot R_{t-1}$ of $R_t = R_{t-1} + \Delta R$ met $\Delta R = (-0{,}09 + 0{,}00006P_{t-1}) \cdot R_{t-1}$.
In de evenwichtssituatie is $\Delta P = 0$ (zie 63a $\Rightarrow \overline{R} = 25$) en $\Delta R = 0$.
$\Delta R = 0 \Rightarrow (-0{,}09 + 0{,}00006\overline{P}) \cdot \overline{R} = 0 \Rightarrow -0{,}09 + 0{,}00006\overline{P} = 0 \Rightarrow 0{,}00006\overline{P} = 0{,}09 \Rightarrow \overline{P} = 1500.$

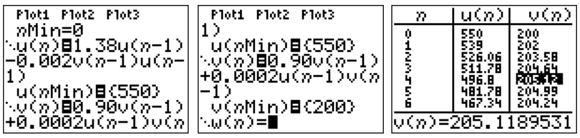


Dus als de natuurlijke sterfte van de roofdieren toeneemt, neemt $\overline{P}$ toe en blijft $\overline{R}$ gelijk.

64a $\boxed{\begin{array}{l} P_t = 1{,}38 \cdot P_{t-1} + a \cdot R_{t-1} \cdot P_{t-1} \\ R_t = 0{,}90 \cdot R_{t-1} + b \cdot P_{t-1} \cdot R_{t-1} \\ \text{met } P_0 = 550 \text{ en } R_0 = 200 \end{array}}$ verder is gegeven: $P_1 = 539$ en $R_1 = 202 \Rightarrow$
$539 = 1{,}38 \cdot 550 + a \cdot 200 \cdot 550 \Rightarrow a = -0{,}002$ en
$202 = 0{,}90 \cdot 200 + b \cdot 550 \cdot 200 \Rightarrow b = 0{,}0002.$

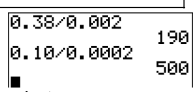


64b Voer de rijen nu in op de GR.
Blader vervolgens door TABLE.
Na 4 maanden is het aantal roofdieren
voor het eerst maximaal met $R_{max} \approx 205$.



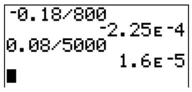
64c $\boxed{\begin{array}{l} P_t = 1{,}38 \cdot P_{t-1} - 0{,}002 \cdot R_{t-1} \cdot P_{t-1} \\ R_t = 0{,}90 \cdot R_{t-1} + 0{,}0002 \cdot P_{t-1} \cdot R_{t-1} \\ \text{met } P_0 = 550 \text{ en } R_0 = 200 \end{array}}$ of $\boxed{\begin{array}{l} P_t = P_{t-1} + \Delta P \text{ met } \Delta P = (0{,}38 - 0{,}002R_{t-1}) \cdot P_{t-1} \\ R_t = R_{t-1} + \Delta R \text{ met } \Delta R = (-0{,}10 + 0{,}0002P_{t-1}) \cdot R_{t-1} \\ \text{met } P_0 = 550 \text{ en } R_0 = 200 \end{array}}$

$\Delta P = 0 \Rightarrow (0{,}38 - 0{,}002\overline{R}) \cdot \overline{P} = 0 \Rightarrow 0{,}38 - 0{,}002\overline{R} = 0 \Rightarrow -0{,}002\overline{R} = -0{,}38 \Rightarrow \overline{R} = 190.$
$\Delta R = 0 \Rightarrow (-0{,}10 + 0{,}0002\overline{P}) \cdot \overline{R} = 0 \Rightarrow -0{,}10 + 0{,}0002\overline{P} = 0 \Rightarrow 0{,}0002\overline{P} = 0{,}10 \Rightarrow \overline{P} = 500.$



64d Ga na dat: Als de vruchtbaarheid van de prooidieren toeneemt, neemt $\overline{R}$ toe en blijft $\overline{P}$ gelijk. (zie ook 63b)

65 $\boxed{\begin{array}{l} P_t = 1{,}18 \cdot P_{t-1} + a \cdot R_{t-1} \cdot P_{t-1} \\ R_t = 0{,}92 \cdot R_{t-1} + b \cdot P_{t-1} \cdot R_{t-1} \\ \text{met beginwaarden } P_0 \text{ en } R_0 \end{array}}$ of $\boxed{\begin{array}{l} P_t = P_{t-1} + \Delta P \text{ met } \Delta P = (0{,}18 + a \cdot R_{t-1}) \cdot P_{t-1} \\ R_t = R_{t-1} + \Delta R \text{ met } \Delta R = (-0{,}08 + b \cdot P_{t-1}) \cdot R_{t-1} \\ \text{met beginwaarden } P_0 \text{ en } R_0 \end{array}}$



$\Delta P = 0 \Rightarrow (0{,}18 + a \cdot \overline{R}) \cdot \overline{P} = 0 \Rightarrow 0{,}18 + a \cdot \overline{R} = 0 \Rightarrow a \cdot \overline{R} = -0{,}18 \Rightarrow \overline{R} = \frac{-0{,}18}{a} = 800$ (gegeven) $\Rightarrow a = -0{,}000225.$

$\Delta R = 0 \Rightarrow (-0{,}08 + b \cdot \overline{P}) \cdot \overline{R} = 0 \Rightarrow -0{,}08 + b \cdot \overline{P} = 0 \Rightarrow b \cdot \overline{P} = 0{,}08 \Rightarrow \overline{P} = \frac{0{,}08}{b} = 5\,000$ (gegeven) $\Rightarrow b = 0{,}000016.$

66a Als de prooi- en roofdieren elkaar niet beïnvloeden, dan neemt het aantal roofdieren af $\Rightarrow 0 < c < 1.$

66b Als de prooi- en roofdieren elkaar niet beïnvloeden, dan neemt het aantal prooidieren toe $\Rightarrow a > 1.$
Als de prooi- en roofdieren elkaar wel beïnvloeden, dan
zal P_t kleiner zijn dan $a \cdot P_{t-1} \Rightarrow b < 0$ en zal R_t groter zijn dan $c \cdot R_{t-1} \Rightarrow d > 0.$

66c $\boxed{\begin{array}{l} P_t = a \cdot P_{t-1} + b \cdot R_{t-1} \cdot P_{t-1} \\ R_t = c \cdot R_{t-1} + d \cdot P_{t-1} \cdot R_{t-1} \\ \text{met beginwaarden } P_0 \text{ en } R_0 \end{array}}$ of $\boxed{\begin{array}{l} P_t = P_{t-1} + \Delta P \text{ met } \Delta P = (a - 1 + b \cdot R_{t-1}) \cdot P_{t-1} \\ R_t = R_{t-1} + \Delta R \text{ met } \Delta R = (c - 1 + d \cdot P_{t-1}) \cdot R_{t-1} \\ \text{met beginwaarden } P_0 \text{ en } R_0 \end{array}}$

$\Delta P = 0 \Rightarrow (a - 1 + b \cdot \overline{R}) \cdot \overline{P} = 0 \Rightarrow a - 1 + b \cdot \overline{R} = 0 \Rightarrow b \cdot \overline{R} = 1 - a \Rightarrow \overline{R} = \frac{1-a}{b}.$

$\Delta R = 0 \Rightarrow (c - 1 + d \cdot \overline{P}) \cdot \overline{R} = 0 \Rightarrow c - 1 + d \cdot \overline{P} = 0 \Rightarrow d \cdot \overline{P} = 1 - c \Rightarrow \overline{P} = \frac{1-c}{d}.$

66d Het getal a zal veranderen. $\overline{P} = \frac{1-c}{d}$ is niet afhankelijk van a, maar $\overline{R} = \frac{1-a}{b}$ wel.
Verandering van de vruchtbaarheid van de prooidieren heeft dus geen invloed op $\overline{P}$ maar wel op $\overline{R}$.

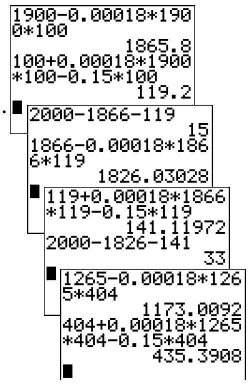
67 $\Delta G < 0$, want door de griep zijn er steeds minder mensen die nog gezond zijn, maar vatbaar voor de griep.
$\Delta I > 0$, want steeds meer inwoners worden immuun (niet meer vatbaar voor de ziekte).
$\Delta G + \Delta Z + \Delta I = 0$, want $G_t + Z_t + I_t = G_{t-1} + Z_{t-1} + I_{t-1} = 2\,000$ (gesloten systeem).
Er geldt dan namelijk: $G_{t-1} + \Delta G + Z_{t-1} + \Delta Z + I_{t-1} + \Delta I = G_{t-1} + Z_{t-1} + I_{t-1} \Rightarrow \Delta G + \Delta Z + \Delta I = 0.$

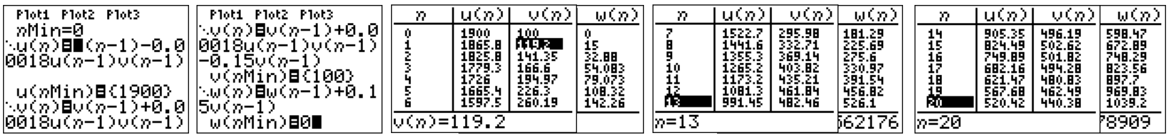
68a $\Delta G + \Delta Z + \Delta I = 0 \Rightarrow \Delta Z = -\Delta G - \Delta I = 0{,}00018 \cdot G_{t-1} \cdot Z_{t-1} - 0{,}15 \cdot Z_{t-1}.$
Omdat $Z_t = Z_{t-1} + \Delta Z$ krijg je $Z_t = Z_{t-1} + 0{,}00018 \cdot G_{t-1} \cdot Z_{t-1} - 0{,}15 \cdot Z_{t-1}.$

68b Bij de aanwezigheid van één gezonde inwoner en één inwoner met griep
is de kans dat de gezonde inwoner de griep krijgt van de inwoner met griep gelijk aan 0,00018.

68c $G_1 = G_0 - 0{,}00018 \cdot G_0 \cdot Z_0$, dus $G_1 = 1900 - 0{,}00018 \cdot 1900 \cdot 100 \approx 1866.$
$Z_1 = Z_0 + 0{,}00018 \cdot G_0 \cdot Z_0 - 0{,}15 \cdot Z_0$, dus $Z_1 = 100 + 0{,}00018 \cdot 1900 \cdot 100 - 0{,}15 \cdot 100 \approx 119.$
$G_1 + Z_1 + I_1 = 2\,000 \Rightarrow I_1 = 2\,000 - G_1 - Z_1 \approx 2\,000 - 1866 - 119 = 15.$
$G_2 = G_1 - 0{,}00018 \cdot G_1 \cdot Z_1$, dus $G_2 = 1866 - 0{,}00018 \cdot 1866 \cdot 119 \approx 1826.$
$Z_2 = Z_1 + 0{,}00018 \cdot G_1 \cdot Z_1 - 0{,}15 \cdot Z_1$, dus $Z_2 = 119 + 0{,}00018 \cdot 1866 \cdot 119 - 0{,}15 \cdot 119 \approx 141.$
$G_2 + Z_2 + I_2 = 2\,000 \Rightarrow I_2 = 2\,000 - G_2 - Z_2 \approx 2\,000 - 1826 - 141 = 33.$

68d $G_{11} = G_{10} - 0{,}00018 \cdot G_{10} \cdot Z_{10} = 1265 - 0{,}00018 \cdot 1265 \cdot 404 \approx 1173.$
$Z_{11} = Z_{10} + 0{,}00018 \cdot G_{10} \cdot Z_{10} - 0{,}15 \cdot Z_{10} = 404 + 0{,}00018 \cdot 1265 \cdot 404 - 0{,}15 \cdot 404 \approx 435.$

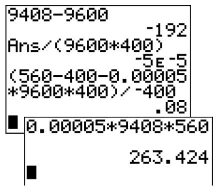




68e Voor elke t geldt: $G_t + Z_t + I_t = 2\,000$ (gesloten systeem).
Vul de formules in op de GR (zie de schermen hierboven) en teken vervolgens in het werkboek de grafiek van I_t.

69a $G_1 = G_0 - a \cdot G_0 \cdot Z_0$, dus $9\,408 = 9\,600 - a \cdot 9\,600 \cdot 400 \Rightarrow a = 0{,}00005.$
$Z_1 = Z_0 + a \cdot G_0 \cdot Z_0 - b \cdot Z_0$, dus $560 = 400 + 0{,}00005 \cdot 9\,600 \cdot 400 - b \cdot 400 \Rightarrow b = 0{,}08.$

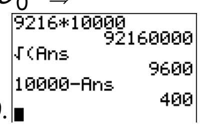
69b De tweede dag loopt van $t = 1$ tot $t = 2$. Verder is $G_1 = 9\,408$ en $Z_1 = 560$.
Dus op de tweede dag hebben $0{,}00005 \cdot 9\,408 \cdot 560 \approx 263$ mensen griep gekregen.



70a $Z_t = Z_{t-1} + 0{,}0001 \cdot G_{t-1} \cdot Z_{t-1} - 0{,}20 \cdot Z_{t-1}.$

70b $G_0 + Z_0 + I_0 = 10\,000 \Rightarrow G_0 + Z_0 + 0 = 10\,000 \Rightarrow Z_0 = 10\,000 - G_0.$
$G_1 = G_0 - 0{,}0001 \cdot G_0 \cdot Z_0 \Rightarrow 9\,216 = G_0 - 0{,}0001 \cdot G_0 \cdot Z_0 = G_0 - 0{,}0001 \cdot G_0 \cdot (10\,000 - G_0) = 0{,}0001 \cdot G_0^{\,2} \Rightarrow$
$0{,}0001 \cdot G_0^{\,2} = 9\,216 \Rightarrow G_0^{\,2} = 92\,160\,000 \Rightarrow G_0 = \sqrt{92\,160\,000} = 9\,600$ en $Z_0 = 10\,000 - 9\,600 = 400.$

70c $Z_1 = Z_0 + 0{,}0001 \cdot G_0 \cdot Z_0 - 0{,}20 \cdot Z_0 \Rightarrow 1{,}65 \cdot Z_0 = Z_0 + 0{,}0001 \cdot (10\,000 - Z_0) \cdot Z_0 - 0{,}20 \cdot Z_0 \Rightarrow$
$1{,}65 \cdot Z_0 = 2 \cdot Z_0 - 0{,}0001 Z_0^{\,2} - 0{,}20 \cdot Z_0 \Rightarrow 0{,}0001 Z_0^{\,2} - 0{,}15 \cdot Z_0 = 0 \Rightarrow 0{,}0001 Z_0 \cdot (Z_0 - 1500) = 0.$
Dus $Z_0 = 1500$ en $G_0 = 10\,000 - 1500 = 8\,500.$



71a Het getal 0,8 betekent dat 80% van de personen die op het platteland woont, er een jaar later nog woont.
Het getal 0,04 betekent dat 4% van de inwoners van de stad een jaar later op het platteland woont.
Het getal 0,2 betekent dat 20% van de personen die op het platteland woont een jaar later in de stad woont.
Het getal 0,96 betekent dat 96% van de inwoners van de stad een jaar later nog in de stad woont.

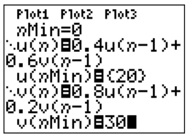
71b $0,8+0,2=1 \Rightarrow$ alle inwoners van het platteland wonen een jaar later weer op het platteland of in de stad.
$0,04+0,96=1 \Rightarrow$ alle inwoners van de stad wonen een jaar later weer in de stad of op het platteland.

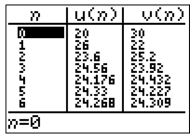
72a $0,2+0,8=1$ en $0,7+0,3=1$.

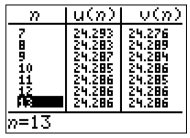
72b Bij het eerste stelsel niet, want $0,4+0,8\neq 1$ (en ook $0,6+0,2\neq 1$).
Bij het tweede stelsel wel, want $0,1+0,9=1$ en ook $0,3+0,7=1$.

72b Dan kun je niet gebruiken dat $x_t+y_t=x_{t-1}+y_{t-1}=$ constant.

72d Er treedt convergentie op (zie de schermen hiernaast).



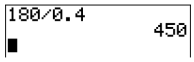




73a $0,9+0,1=1$ en $0,3+0,7=1 \Rightarrow$ een gesloten systeem $\Rightarrow A_{t-1}+B_{t-1}=350+250=600$ (voor elke t).

$$\left.\begin{array}{l}A_t=0,9A_{t-1}+0,3B_{t-1}\\ B_{t-1}=600-A_{t-1}\end{array}\right\}\Rightarrow A_t=0,9A_{t-1}+0,3\cdot(600-A_{t-1})$$
$$A_t=0,9A_{t-1}+180-0,3A_{t-1}$$
$$A_t=0,6A_{t-1}+180 \text{ met } A_0=350$$

$A_t=\overline{A}+a^t\cdot(A_0-\overline{A})$ met $\overline{A}=\frac{b}{1-a}=\frac{180}{1-0,6}=\frac{180}{0,4}=450$



$A_t=450+0,6^t\cdot(350-450)=450-100\cdot 0,6^t$ (voor $t\geq 0$)

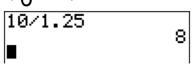
$$\left.\begin{array}{l}B_t=600-A_t\\ A_t=450-100\cdot 0,6^t\end{array}\right\}\Rightarrow B_t=600-(450-100\cdot 0,6^t)$$
$$B_t=150+100\cdot 0,6^t \text{ (voor } t\geq 0)$$

73b Voor grote t is $0,6^t\approx 0$, dus A_t convergeert naar $450-100\cdot 0=450$ en B_t convergeert naar $150+100\cdot 0=150$.

74a $0,25+0,75=1$ en $0,5+0,5=1 \Rightarrow$ een gesloten systeem $\Rightarrow x_{t-1}+y_{t-1}=4+16=20$ (voor elke t).

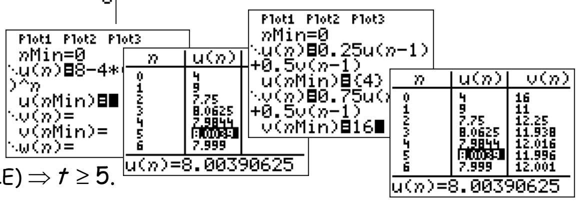
$$\left.\begin{array}{l}x_t=0,25x_{t-1}+0,5y_{t-1}\\ y_{t-1}=20-x_{t-1}\end{array}\right\}\Rightarrow x_t=0,25x_{t-1}+0,5\cdot(20-x_{t-1})$$
$$x_t=0,25x_{t-1}+10-0,5x_{t-1}$$
$$x_t=-0,25x_{t-1}+10 \text{ met } x_0=4$$

$x_t=\overline{x}+a^t\cdot(x_0-\overline{x})$ met $\overline{x}=\frac{b}{1-a}=\frac{10}{1--0,25}=\frac{10}{1,25}=8$



$x_t=8+(-0,25)^t\cdot(4-8)=8-4\cdot(-0,25)^t$ (voor $t\geq 0$)

$$\left.\begin{array}{l}y_t=20-x_t\\ x_t=8-4\cdot(-0,25)^t\end{array}\right\}\Rightarrow y_t=20-(8-4\cdot(-0,25)^t)$$
$$y_t=12+4\cdot(-0,25)^t \text{ (voor } t\geq 0)$$



74b $x_t=8-4\cdot(-0,25)^t$ verschilt minder dan 0,01 van $\overline{x}=8$ (TABLE) $\Rightarrow t\geq 5$.
Dus vanaf $t=5$. (dit kan ook met de oorspronkelijke formules)

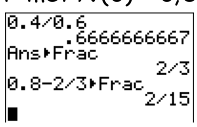
75a

$$\boxed{\begin{array}{l}N(t)=0,6\cdot N(t-1)+0,2\cdot R(t-1)\\ R(t)=0,4\cdot N(t-1)+0,8\cdot R(t-1)\\ \text{met } N(0)=0,8 \text{ (miljoen) en } R(0)=1,2 \text{ (miljoen)}\end{array}}$$

75b $0,6+0,4=1$ en $0,2+0,8=1 \Rightarrow$ een gesloten systeem $\Rightarrow N(t-1)+R(t-1)=0,8+1,2=2$ (voor elke t).

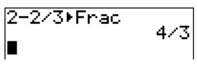
$$\left.\begin{array}{l}N(t)=0,6\cdot N(t-1)+0,2\cdot R(t-1)\\ R(t-1)=2-N(t-1)\end{array}\right\}\Rightarrow N(t)=0,6\cdot N(t-1)+0,2\cdot(2-N(t-1))$$
$$N(t)=0,6\cdot N(t-1)+0,4-0,2\cdot N(t-1)$$
$$N(t)=0,4\cdot N(t-1)+0,4 \text{ met } N(0)=0,8$$

$N(t)=\overline{N}+a^t\cdot(N(0)-\overline{N})$ met $\overline{N}=\frac{b}{1-a}=\frac{0,4}{1-0,4}=\frac{0,4}{0,6}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$



$N(t)=\frac{2}{3}+0,4^t\cdot(0,8-\frac{2}{3})=\frac{2}{3}+\frac{2}{15}\cdot 0,4^t$ (voor $t\geq 0$)

$$\left.\begin{array}{l}N(t)=\frac{2}{3}+\frac{2}{15}\cdot 0,4^t\\ R(t)=2-N(t)\end{array}\right\}\Rightarrow R(t)=2-(\tfrac{2}{3}+\tfrac{2}{15}\cdot 0,4^t)$$
$$R(t)=\frac{4}{3}-\frac{2}{15}\cdot 0,4^t \text{ (voor } t\geq 0)$$



75c Voor grote t is $0,4^t\approx 0$, dus $N(t)$ convergeert naar $\frac{2}{3}+\frac{2}{15}\cdot 0=\frac{2}{3}$.
Op den duur kijken $\frac{2}{3}$ miljoen personen naar zender N.

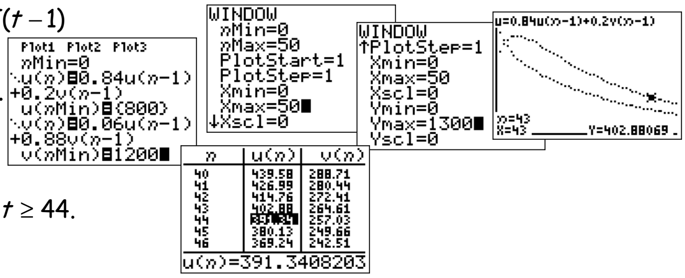
76a $J(t) = J(t-1) - 0{,}10 \cdot J(t-1) + 0{,}2 \cdot V(t-1) - 0{,}06 \cdot J(t-1)$
$J(t) = 0{,}84 \cdot J(t-1) + 0{,}2 \cdot V(t-1)$ met $J(0) = 800$.

76b $V(t) = 0{,}06 \cdot J(t-1) + 0{,}88 \cdot V(t-1)$ met $V(0) = 1200$.

76c Je hebt niet te maken met een gesloten systeem.

76d Maak een schets van de plot hiernaast.

76e $J(t) < 400$ én (tegelijkertijd ook) $V(t) < 400$ (TABLE) $\Rightarrow t \geq 44$.
Dus vanaf $t = 44$.

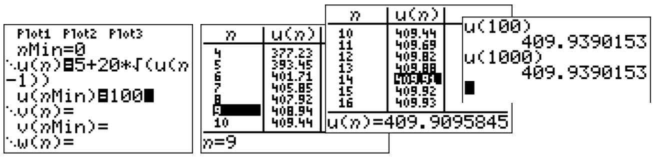


Diagnostische toets

D1a $u_6 \approx 402$ en $u_9 \approx 409$. (TABLE)

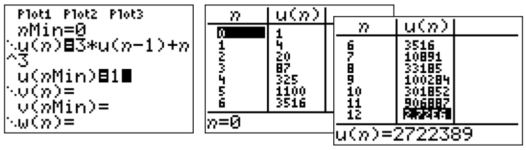
D1b $u_n > 409{,}9$ (TABLE) $\Rightarrow n \geq 14 \Rightarrow$ vanaf de 15^e term.

D1c De rij nadert naar 409,939.



D2a $u_0 = 1,\ u_1 = 4,\ u_2 = 20,\ u_3 = 87,\ u_4 = 325$ en $u_5 = 1100$. (TABLE)

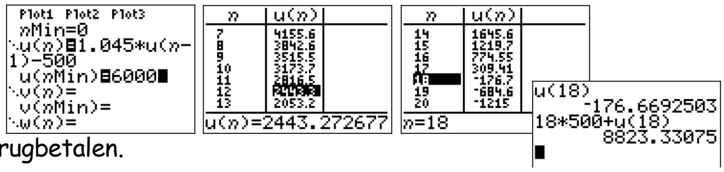
D2b $u_n > 1\,000\,000$ (TABLE) $\Rightarrow n \geq 12$.



D3a $u_n = 1{,}045 \cdot u_{n-1} - 500$ met $u_0 = 6\,000$.

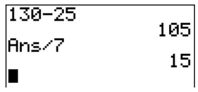
D3b $n = 12$ (TABLE) $\Rightarrow u_{12} \approx 2\,443{,}27$ (€).

D3c $u_n < 0$ (TABLE) $\Rightarrow n \geq 18 \Rightarrow u_{18} \approx -176{,}67$ (€).
Hij moet $18 \times 500 - 176{,}67 = 8\,823{,}33$ (€) terugbetalen.

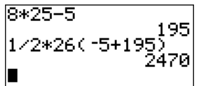


D4a Recursieve formule: $u_n = u_{n-1} + 7$ met $u_0 = 25$ en directe formule: $u_n = 25 + 7 \cdot n$ voor $n \geq 0$.

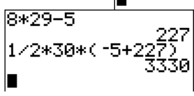
D4b $u_n = 130 \Rightarrow 25 + 7 \cdot n = 130 \Rightarrow 7 \cdot n = 105 \Rightarrow n = 15$. Dus de 16^e term is 130.



D5a $u_0 = 8 \cdot 25 - 5 = -5$ en $u_{25} = 8 \cdot 25 - 5 = 195 \Rightarrow \sum_{k=0}^{25} u_k = \sum_{k=0}^{25} (8k - 5) = \frac{1}{2} \cdot 26 \cdot (-5 + 195) = 2\,470$.

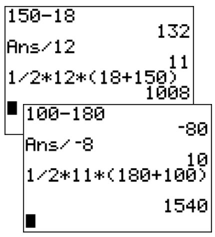


D5b $u_0 = -5$ en $u_{29} = 8 \cdot 29 - 5 = 227 \Rightarrow \sum_{k=0}^{29} u_k = \sum_{k=0}^{29} (8k - 5) = \frac{1}{2} \cdot 30 \cdot (-5 + 227) = 3\,330$.



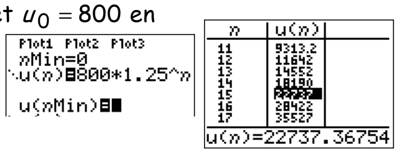
D6a rr met $u_0 = 18$ en $v = 12 \Rightarrow$ directe formule: $u_n = 18 + 12n$ voor $n \geq 0$.
$u_n = 150$ (TABLE of) $\Rightarrow 18 + 12n = 150 \Rightarrow 12n = 132 \Rightarrow n = 11$.
Dus $18 + 30 + ... + 150 = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot (18 + 150) = 1\,008$.

D6b rr met $u_0 = 180$ en $v = -8 \Rightarrow$ directe formule: $u_n = 180 - 8n$ voor $n \geq 0$.
$u_n = 100$ (TABLE of) $\Rightarrow 180 - 8n = 100 \Rightarrow -8n = -80 \Rightarrow n = 10$.
Dus $180 + 172 + ... + 100 = \frac{1}{2} \cdot 11 \cdot (180 + 100) = 1\,540$.



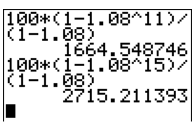
D7a mr met $u_0 = 800$ en $r = 1{,}25 \Rightarrow$ recursieve formule: $u_n = u_{n-1} \cdot 1{,}25$ met $u_0 = 800$ en
directe formule: $u_n = 800 \cdot 1{,}25^n$ voor $n \geq 0$.

D7b $u_n > 20\,000$ (TABLE) $\Rightarrow n \geq 15$. Dus vanaf de 16^e term.



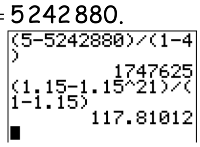
D8a $\sum_{k=0}^{10} u_k = \sum_{k=0}^{10} (100 \cdot 1{,}08^k) = \frac{100 \cdot (1 - 1{,}08^{11})}{1 - 1{,}08} \approx 1664{,}55$.

D8b $\sum_{k=0}^{14} (100 \cdot 1{,}08^k) = \frac{100 \cdot (1 - 1{,}08^{15})}{1 - 1{,}08} \approx 2\,715{,}21$.

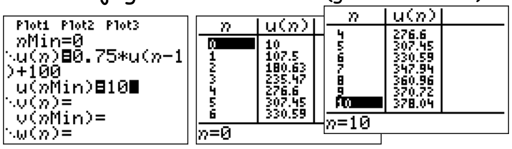


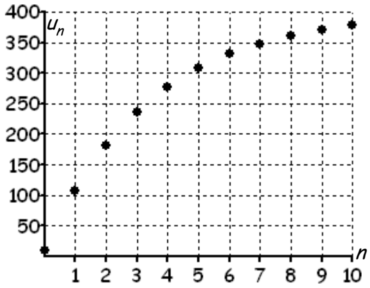
D9a mr met $u_n = 1310\,710$ en $r = 4 \Rightarrow u_{n+1} = 1310\,710 \cdot 4 = 5\,242\,880$.
$5 + 20 + 80 + ... + 1310\,710 = \frac{5 - 5242880}{1 - 4} = 1\,747\,625$.

D9b $1{,}15 + 1{,}15^2 + 1{,}15^3 + ... + 1{,}15^{20} = \frac{1{,}15 - 1{,}15^{21}}{1 - 1{,}15} = 117{,}810$.



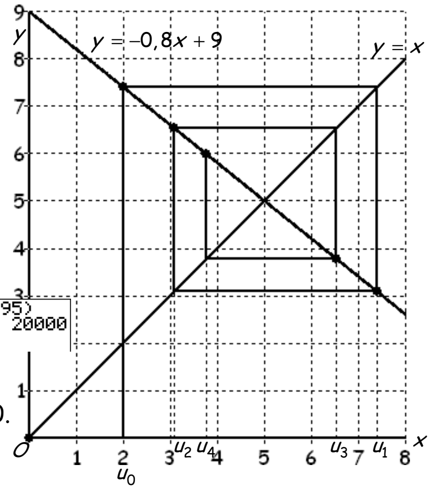
D10a Zie de tijdgrafiek hiernaast (gebruik TABLE).



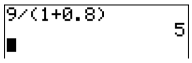


D10b Ja, de termen gaan steeds dichter richting grenswaarde $g = \frac{b}{1-a} = \frac{100}{1-0{,}75} = \frac{100}{0{,}25} = 400$. (of $g = 0{,}75g + 100$ oplossen)

D11a Zie de webgrafiek hiernaast.

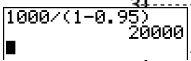


D11b De punten komen steeds dichter bij het snijpunt van de lijnen $y = -0{,}8x + 9$ en $y = x$ te liggen. De grenswaarde is $\frac{b}{1-a} = \frac{9}{1+0{,}8} = \frac{9}{1{,}8} = 5$. (of $-0{,}8x + 9 = x$ oplossen)



D12a Directe formule: $u_n = \overline{u} + a^n \cdot (u_0 - \overline{u})$ met $\overline{u} = \frac{b}{1-a} = \frac{-10}{1-1{,}25} = \frac{-10}{-0{,}25} = 40$.

Dus $u_n = 40 + 1{,}25^n \cdot (20 - 40) = 40 - 20 \cdot 1{,}25^n$ voor $n \geq 0$.

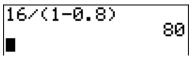


D12b Directe formule: $P_n = \overline{P} + a^n \cdot (P_0 - \overline{P})$ met $\overline{P} = \frac{b}{1-a} = \frac{1000}{1-0{,}95} = \frac{1000}{0{,}05} = 20\,000$.

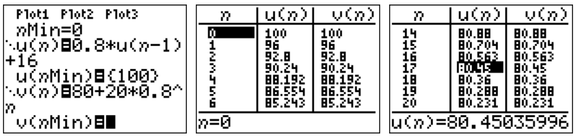
Dus $P_n = 20\,000 + 0{,}95^n \cdot (25\,000 - 20\,000) = 20\,000 + 5\,000 \cdot 0{,}95^n$ voor $n \geq 0$.

D13a $Z_t = 0{,}8 \cdot Z_{t+1} + 16$ met $Z_0 = 100$. (afvoer 20% per uur, dus factor 0,8)

D13b Directe formule: $Z_n = \overline{Z} + a^n \cdot (Z_0 - \overline{Z})$ met $\overline{Z} = \frac{b}{1-a} = \frac{16}{1-0{,}8} = \frac{16}{0{,}2} = 80$.



Dus $Z_n = 80 + 0{,}8^t \cdot (100 - 80) = 80 + 20 \cdot 0{,}8^t$ voor $t \geq 0$.

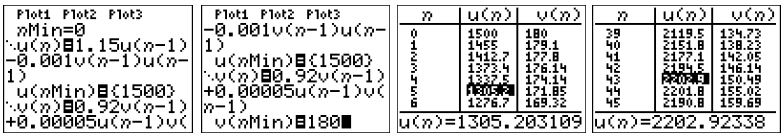


D13c $Z_5 = 80 + 20 \cdot 0{,}8^5$ (TABLE) $\approx 86{,}6$ (kg).

D13d $Z_n < 80 + 0{,}5 = 80{,}5$ (TABLE) $\Rightarrow t \geq 17 \Rightarrow$ na 17 uur.

D14a $P_1 = 1455$ en $P_5 \approx 1305$. (TABLE)

D14b Na 43 maanden voor het eerst maximaal. Er zijn dan 2203 prooidieren. (TABLE)

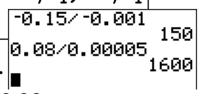


D14c

$$\boxed{\begin{array}{l} P_t = 1{,}15 \cdot P_{t-1} - 0{,}001 \cdot R_{t-1} \cdot P_{t-1} \\ R_t = 0{,}92 \cdot R_{t-1} + 0{,}00005 \cdot P_{t-1} \cdot R_{t-1} \\ \text{met } P_0 = 1500 \text{ en } R_0 = 180 \end{array}}$$

of

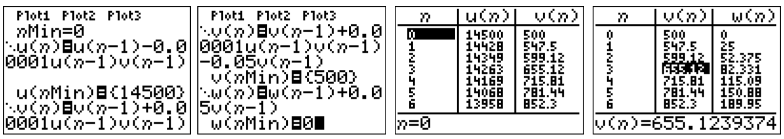
$$\boxed{\begin{array}{l} P_t = P_{t-1} + \Delta P \text{ met } \Delta P = (0{,}15 - 0{,}001 \cdot R_{t-1}) \cdot P_{t-1} \\ R_t = R_{t-1} + \Delta R \text{ met } \Delta R = (-0{,}08 + 0{,}00005 \cdot P_{t-1}) \cdot R_{t-1} \\ \text{met } P_0 = 1500 \text{ en } R_0 = 180 \end{array}}$$



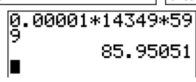
$\Delta P = 0 \Rightarrow (0{,}15 - 0{,}001 \cdot \overline{R}) \cdot \overline{P} = 0 \Rightarrow 0{,}15 - 0{,}001 \cdot \overline{R} = 0 \Rightarrow -0{,}001 \cdot \overline{R} = -0{,}15 \Rightarrow \overline{R} = \frac{-0{,}15}{-0{,}001} = 150$.

$\Delta R = 0 \Rightarrow (-0{,}08 + 0{,}00005 \cdot \overline{P}) \cdot \overline{R} = 0 \Rightarrow -0{,}08 + 0{,}00005 \cdot \overline{P} = 0 \Rightarrow 0{,}00005 \cdot \overline{P} = 0{,}08 \Rightarrow \overline{P} = \frac{0{,}08}{0{,}00005} = 1600$.

D15a $G_1 \approx 14428$; $Z_1 \approx 548$; $I_1 = 25$;
$G_2 \approx 14\,349$; $Z_2 \approx 599$ en $I_2 \approx 52$.

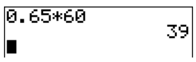


D15b De derde dag loopt van $t = 2$ tot $t = 3$.
Verder is $G_2 \approx 14\,349$; $Z_2 \approx 599$.
Dus op de derde dag hebben $0{,}00001 \cdot 14\,349 \cdot 599 \approx 86$ mensen griep gekregen.



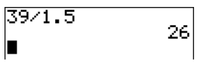
D16 $0{,}15 + 0{,}85 = 1$ en $0{,}65 + 0{,}35 = 1 \Rightarrow$ een gesloten systeem $\Rightarrow x_{t-1} + y_{t-1} = 20 + 40 = 60$ (voor elke t).

$$\left.\begin{array}{l} x_t = 0{,}15x_{t-1} + 0{,}65y_{t-1} \\ y_{t-1} = 60 - x_{t-1} \end{array}\right\} \Rightarrow x_t = 0{,}15x_{t-1} + 0{,}65 \cdot (60 - x_{t-1})$$



$$x_t = 0{,}15x_{t-1} + 39 - 0{,}65x_{t-1}$$
$$x_t = -0{,}5x_{t-1} + 39 \text{ met } x_0 = 20$$

$x_t = \overline{x} + a^t \cdot (x_0 - \overline{x})$ met $\overline{x} = \frac{b}{1-a} = \frac{39}{1 - -0{,}5} = \frac{39}{1{,}5} = 26$



$x_t = 26 + (-0{,}5)^t \cdot (20 - 26) = 26 - 6 \cdot (-0{,}5)^t$ (voor $t \geq 0$)

$$\left.\begin{array}{l} y_t = 60 - x_t \\ x_t = 26 - 6 \cdot (-0{,}5)^t \end{array}\right\} \Rightarrow y_t = 60 - (26 - 6 \cdot (-0{,}5)^t)$$

$y_t = 34 + 6 \cdot (-0{,}5)^t$ (voor $t \geq 0$)

Gemengde opgaven 7. Discrete dynamische modellen

G18a u_n is een rr met $u_0 = 300$ en verschil $v = 6$ en v_n is een mr met $v_0 = 0{,}1$ en factor $r = 2$.
Recursieve formules: $u_n = u_{n-1} + 6$ met $u_0 = 300$ en $v_n = 2 \cdot v_{n-1}$ met $v_0 = 0{,}1$.
Directe formules: $u_n = 300 + 6n$ voor $n \geq 0$ en $v_n = 0{,}1 \cdot 2^n$ voor $n \geq 0$.

G18b $v_n > u_n$ (TABLE) $\Rightarrow n \geq 12$. Dus vanaf $n = 12$.

G18c $S_n = \frac{1}{2} \cdot (n+1) \cdot (u_0 + u_n) = \frac{1}{2} \cdot (n+1) \cdot (300 + 300 + 6n) = \frac{1}{2} \cdot (n+1) \cdot (6n + 600)$.
$T_n = \frac{v_0 \cdot (1 - r^{n+1})}{1 - r} = \frac{0{,}1 \cdot (1 - 2^{n+1})}{1 - 2} = \frac{0{,}1 \cdot (1 - 2^{n+1})}{-1} = -0{,}1 \cdot (1 - 2^{n+1})$.
$T_n > S_n$ (TABLE) $\Rightarrow n \geq 15$. Dus vanaf $n = 15$.

G19a $u_n = 0{,}9 \cdot u_{n-1} + 500$ met $u_0 = 10\,000$.

G19b $u_n = \bar{u} + a^n \cdot (u_0 - \bar{u})$ met $\bar{u} = \frac{b}{1-a}$, $a = 0{,}9$ en $b = 500$ dus $\bar{u} = \frac{500}{1 - 0{,}9} = \frac{500}{0{,}1} = 5\,000$.
$u_n = 5\,000 + 0{,}9^n \cdot (10\,000 - 5\,000) = 5\,000 + 5\,000 \cdot 0{,}9^n$ voor $n \geq 0$

G19c $u_n < 7\,000$ (TABLE) $\Rightarrow n \geq 9$. Dus voor het eerst na 9 dagen.

G20a u_n is een rr met $u_0 = 1000$ en verschil $v = -23$, dus $u_n = 1000 - 23n$ voor $n \geq 0$.
$u_n = 0 \Rightarrow 1000 - 23n = 0 \Rightarrow -23n = -1\,000 \Rightarrow n \approx 43{,}48$. Dus $u_n > 0$ voor $n \leq 43$.
$S_{43} = \frac{1}{2} \cdot (n+1) \cdot (u_0 + u_{43}) = \frac{1}{2} \cdot 44 \cdot (1\,000 + 1\,000 - 23 \cdot 43) = 22\,242$.

G20b v_n is een mr met $v_0 = 1\,000$ en factor $r = 0{,}96$.
Dus $v_n = 1\,000 \cdot 0{,}96^n$ voor $n \geq 0$.
$v_n > 500$ (TABLE) $\Rightarrow n \leq 16$.
$S_{16} = \frac{v_0 \cdot (1 - r^{n+1})}{1 - r} = \frac{1000 \cdot (1 - 0{,}96^{17})}{1 - 0{,}96} \approx 12\,510{,}33$.

G21a $u_n = 1{,}05 \cdot u_{n+1} + 1000$ met $u_0 = 10\,000$.

G21b Op 1-1-2010 is $n = 3 \Rightarrow u_3$ (TABLE) $= 14\,728{,}75$ (€).

G21c $u_n \geq 50\,000$ (TABLE) $\Rightarrow n \geq 18$. Dus voor het eerst op 1-1-2025.

G21d $u_n = 1{,}05 \cdot u_{n+1} - 5000$ met $u_0 = 51199 - 5000 = 46199$.

G21e $u_n < 0$ (TABLE) $\Rightarrow n \geq 13$. u_{12} hoort bij 1-1-2037.
Dus André kan 13 keer 5 000 euro opnemen.

G21f Hij heeft $10\,000 + 17 \cdot 1000 = 27\,000$ euro gestort.
Hij kan $14 \cdot 5\,000 - 1\,449{,}81 = 68\,550{,}19$ euro opnemen.
Dus hij kan uiteindelijk $68\,550{,}19 - 27\,000 = 41\,550{,}19$ euro meer opnemen dan dat hij heeft gestort.

G22a u_n is een mr met $u_0 = 500$ en factor $r = 0{,}9$.
Dus $u_n = 0{,}9 \cdot u_{n-1}$ met $u_0 = 500$ of
$u_n = 500 \cdot 0{,}9^n$ voor $n \geq 0$ ($n = 0$ geeft de stijging in de 1e minuut).
De som van de eerste 15 termen is
S_{14} (TABLE of) $= \frac{u_0 \cdot (1 - r^{n+1})}{1 - r} = \frac{500 \cdot (1 - 0{,}9^{15})}{1 - 0{,}9} \approx 3\,971$ (m).

G22b $u_n < 100$ (TABLE) $\Rightarrow n \geq 16$. Dus in de 17e minuut.

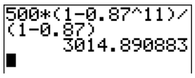
G22c $S_n > 4700$ (TABLE) $\Rightarrow n \geq 26$. Dus na 27 minuten.

G23a $u_n = 2{,}5n + 15$ met $u_0 = 15$ en $u_{10} = 2{,}5 \cdot 10 + 15 = 40$ is een rr.
$S_{10} = \sum_{k=0}^{10} u_k = \frac{1}{2} \cdot (10 + 1) \cdot (15 + 40) = \frac{1}{2} \cdot 11 \cdot 55 = 302{,}5$.
Of: $S_n = S_{n-1} + u_n$ met $S_0 = 15$ (TABLE) $\Rightarrow S_{10} = \sum_{k=0}^{10} u_k = 302{,}5$.

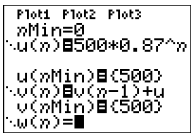
G23b $u_n = u_{n-1} - 3$ met $u_0 = 50$ is een rr.
Dus $u_n = 50 - 3n$ (voor $n \geq 0$) en $S_{10} = \sum_{k=0}^{10} u_k = \frac{1}{2} \cdot (10 + 1) \cdot (50 + 50 - 3 \cdot 10) = \frac{1}{2} \cdot 11 \cdot 70 = 385$.
Of: $S_n = S_{n-1} + u_n$ met $S_0 = 50$ (TABLE) $\Rightarrow S_{10} = \sum_{k=0}^{10} u_k = 385$.

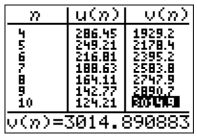
G23c $u_n = 500 \cdot 0{,}87^n$ is een mr met $u_0 = 500$ en $r = 0{,}87$.

$S_{10} = \sum_{k=0}^{10} u_k = \frac{500 \cdot (1-0{,}87^{11})}{1-0{,}87} \approx 3014{,}89.$

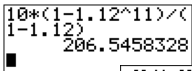


Of: $S_n = S_{n-1} + u_n$ met $S_0 = 500$ (TABLE) $\Rightarrow S_{10} = \sum_{k=0}^{10} u_k \approx 3014{,}89.$



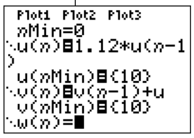


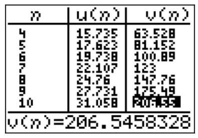
G23d $u_n = 1{,}12 \cdot u_{n-1}$ met $u_0 = 10$ is een mr met $r = 1{,}12$.



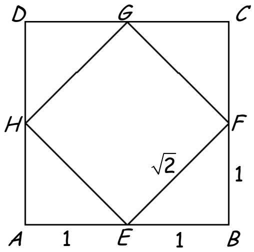
Dus $u_n = 10 \cdot 1{,}12^n$ (voor $n \geq 0$) en $S_{10} = \sum_{k=0}^{10} u_k = \frac{10 \cdot (1-1{,}12^{11})}{1-1{,}12} \approx 206{,}55.$

Of: $S_n = S_{n-1} + u_n$ met $S_0 = 10$ (TABLE) $\Rightarrow S_{10} = \sum_{k=0}^{10} u_k \approx 206{,}55.$



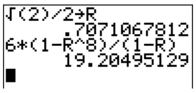


G24a Noem de hoogte van de onderste kubus $h_0 = 6$.

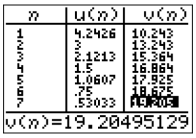


$h_n = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot h_{n-1}$ ($EF = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$) met $h_0 = 6$ is een mr met $r = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Dus $h_n = 6 \cdot (\frac{\sqrt{2}}{2})^n$ (voor $n \geq 0$) en $S_7 = \sum_{k=0}^{7} h_k = \frac{6 \cdot (1-(\frac{\sqrt{2}}{2})^8)}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}} \approx 19{,}2$ (cm).

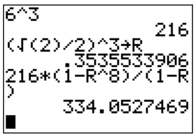


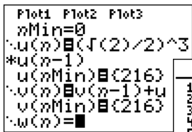
Of: $S_n = S_{n-1} + h_n$ met $S_0 = 6$ (TABLE) $\Rightarrow S_7 = \sum_{k=0}^{7} h_k \approx 19{,}2$ (cm).



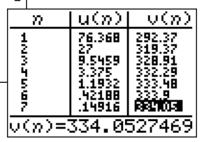
Noem het volume van de onderste kubus $v_0 = 6^3 = 216$.

$v_n = (\frac{\sqrt{2}}{2})^3 \cdot v_{n-1}$ met $v_0 = 216$ is een mr met $r = (\frac{\sqrt{2}}{2})^3$.



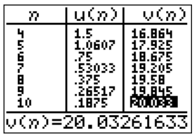


Dus $v_n = 216 \cdot ((\frac{\sqrt{2}}{2})^3)^n$ (voor $n \geq 0$) en $T_7 = \sum_{k=0}^{7} v_k = \frac{216 \cdot (1-((\frac{\sqrt{2}}{2})^3)^8)}{1-(\frac{\sqrt{2}}{2})^3} \approx 334{,}053$ (cm^3).



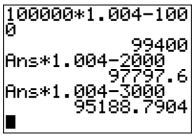
Of: $T_n = T_{n-1} + v_n$ met $T_0 = 216$ (TABLE) $\Rightarrow T_7 = \sum_{k=0}^{7} v_k \approx 334{,}053$ (cm^3).

G24b $S_n > 20$ (TABLE) $\Rightarrow n \geq 10$. Dus minimaal 11 kubusssen nodig.

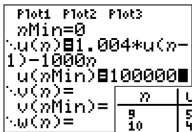


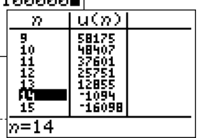
G25a Na 1 maand is de schuld $100\,000 \cdot 1{,}004 - 1000 = 99\,400$ (€).
Na 2 maanden is de schuld $99\,400 \cdot 1{,}004 - 2\,000 = 97\,796{,}60$ (€).

G25b Na 3 maanden is de schuld $97\,796{,}60 \cdot 1{,}004 - 3000 \approx 95188{,}79$ (€).



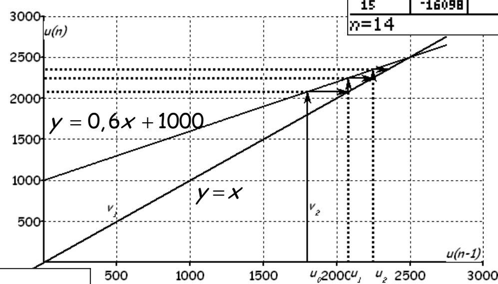
G25c $u_n = 1{,}004 \cdot u_{n-1} - 1000n$ met $u_0 = 100\,000$.
$u_n < 0$ (TABLE) $\Rightarrow n \geq 14$. Dus na 14 maanden is de schuld afgelost.





G26a $A_n = 0{,}6 \cdot A_{n-1} + 1000$ met $A_0 = 1800$.

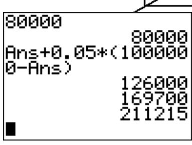
G26b Zie de webgrafiek hiernaast. De rij A_n convergeert.



G26c $A_n = \overline{A} + a^n \cdot (A_0 - \overline{A})$ met $\overline{A} = \frac{b}{1-a} = \frac{1000}{1-0{,}6} = \frac{1000}{0{,}4} = 2500.$

Dus $A_n = 2500 + 0{,}6^n \cdot (1800 - 2500) = 2500 - 700 \cdot 0{,}6^n$.

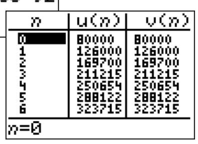
G27a
9:00 $80\,000$
10:00 $80\,000 + 0{,}05 \cdot (1000\,000 - 80\,000) = 126\,000$
11:00 $126\,000 + 0{,}05 \cdot (1000\,000 - 126\,000) = 169\,700$
12:00 $169\,700 + 0{,}05 \cdot (1000\,000 - 169\,700) = 211\,215.$

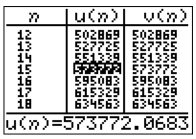


G27b
$$R_n = R_{n-1} + 0{,}05 \cdot (1000\,000 - R_{n-1}) \text{ met } R_0 = 80\,000$$
$$= R_{n-1} + 50\,000 - 0{,}05 \cdot R_{n-1} \text{ met } R_0 = 80\,000$$
$$= 0{,}95 \cdot R_{n-1} + 50\,000 \text{ met } R_0 = 80\,000.$$

G27c $R_n = \overline{R} + a^n \cdot (R_0 - \overline{R})$ met $\overline{R} = \frac{b}{1-a} = \frac{50000}{1-0{,}95} = \frac{50000}{0{,}05} = 1000\,000.$

Dus $R_n = 1000\,000 + 0{,}95^n \cdot (80\,000 - 1000\,000) = 1000\,000 - 920\,000 \cdot 0{,}95^n$.





G27d Bij 2 februari om 12:00 (16[e] boodschap) hoort $n = 15$.
Dus (TABLE) $R_{15} \approx 573772$ of bijna 574000.

G27e $R_n - R_{n-1} \le 10\,000 \Rightarrow n \ge 31$. Dus na 32 uitzendingen.
Er zijn dan ruim 812 000 personen uit de doelgroep bereikt.

n	u(n)	v(n)
27	769683	769683
28	781199	781199
29	792139	792139
30	802532	802532
31	812406	812406
32	821785	821785
33	830696	830696

u(n)=812405.7203

G28a $A_n = 0{,}73 \cdot A_{n-1} + 12$ met $A_0 = 20$.

G28b $A_n = \overline{A} + a^n \cdot (A_0 - \overline{A})$ met $\overline{A} = \frac{b}{1-a} = \frac{12}{1-0{,}73} = \frac{12}{0{,}27} \approx 44{,}44$.
Dus $A_n \approx 44{,}44 + 0{,}73^n \cdot (20 - 44{,}44) = 44{,}44 - 24{,}44 \cdot 0{,}73^n$.

```
1-0.73
                .27
12/0.27
        44.44444444
```

G28c $A_t = 0{,}73^{\frac{1}{24}} \cdot A_{t-1} + 0{,}5 \approx 0{,}987 \cdot A_{t-1} + 0{,}5$ met $A_0 = 20$.
$A_t = \overline{A} + a^t \cdot (A_0 - \overline{A})$ met $\overline{A} = \frac{b}{1-a} \approx 38{,}38$.
Dus $A_t \approx 38{,}38 + 0{,}987^t \cdot (20 - 38{,}38) = 38{,}38 - 18{,}38 \cdot 0{,}987^n$.

```
0.73^(1/24)
        .9869726524
0.5/(1-Ans)
        38.38079835
```

G28d De tweede differentievergelijking met $\overline{A} \approx 38{,}38$ heeft de voorkeur.
De evenwichtswaarde is lager dan in de eerste situatie, dat wil zeggen dat er minder verontreiniging overblijft.

G29a In 1999 is $t = 78$ (TABLE) $\Rightarrow W_{78} \approx 9{,}62$ (seconden).
Dit wijkt $\frac{9{,}79 - W_{78}}{9{,}79} \times 100\% \approx 1{,}7\%$ af van de werkelijkheid.

```
Plot1 Plot2 Plot3
 nMin=0
 u(n)=0.999*u(n-
1)
 u(nMin)={10.4}
 v(n)=
 v(nMin)=
 w(n)=
```

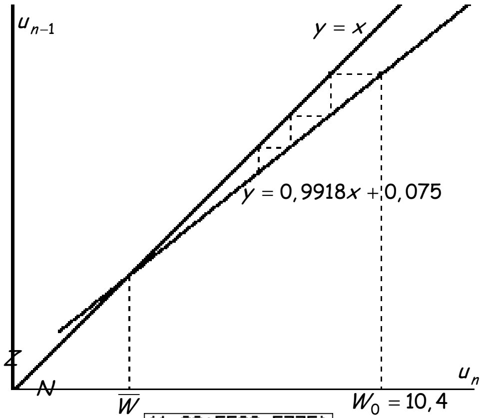
```
u(78)
        9.619254628
Ans-9.79
        -.1707453725
Ans/9.79*100
        -1.744079392
```

```
Plot1 Plot2 Plot3
 nMin=0
 u(n)=0.9918*u(n
-1)+0.075
 u(nMin)={10.4}
 v(n)=
```

```
u(89)
        9.748796326
```

G29b In 2010 is $t = 89$ (TABLE) $\Rightarrow W_{89} \approx 9{,}75$ (seconden).

G29c Schets de lijnen $y = 0{,}9918x + 0{,}075$ en $y = x$.
Maak een schets van de webgrafiek hiernaast.
W_t convergeert van boven af naar de evenwichtswaarde.
De evenwichtswarde is $\overline{W} = \frac{b}{1-a} = \frac{0{,}075}{1-0{,}9918} \approx 9{,}15$ (seconden).



G30a $P_1 = 1{,}20P_0 + a \cdot R_0 \cdot P_0$, dus $5775 = 1{,}20 \cdot 5500 + a \cdot 300 \cdot 5500 \Rightarrow a = -0{,}0005$.
$R_1 = 0{,}90R_0 + b \cdot P_0 \cdot R_0$, dus $303 = 0{,}90 \cdot 300 + b \cdot 5500 \cdot 300 \Rightarrow b = 0{,}00002$.

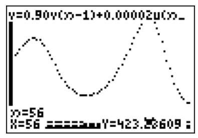
```
(1.20*5500-5775)
/(-300*5500)
              -5E-4
(0.90*300-303)/(
-5500*300)
               2E-5
```

G30b $P_t = 1{,}20P_{t-1} - 0{,}0005 \cdot R_{t-1} \cdot P_{t-1}$
$= P_{t-1} + 0{,}20P_{t-1} - 0{,}0005 \cdot R_{t-1} \cdot P_{t-1}$
$= P_{t-1} + (0{,}20 - 0{,}0005 \cdot R_{t-1}) \cdot P_{t-1}$
$= P_{t-1} + \Delta P$.
In evenwichtswaarde is
$P_t = P_{t-1} = \overline{P}$ en $R_t = R_{t-1} = \overline{R} \Rightarrow \Delta P = 0$, dus
$(0{,}20 - 0{,}0005 \cdot \overline{R}) \cdot \overline{P} = 0$
$0{,}20 - 0{,}0005 \cdot \overline{R} = 0$
$0{,}0005 \cdot \overline{R} = 0{,}20$
$\overline{R} = 400$.

```
0.20/0.0005
                400
```

$R_t = 0{,}90R_{t-1} + 0{,}00002 \cdot P_{t-1} \cdot R_{t-1}$
$= R_{t-1} - 0{,}10R_{t-1} + 0{,}00002 \cdot P_{t-1} \cdot R_{t-1}$
$= R_{t-1} + (-0{,}10 + 0{,}00002 \cdot P_{t-1}) \cdot R_{t-1}$
$= R_{t-1} + \Delta R$.
In evenwichtswaarde is
$P_t = P_{t-1} = \overline{P}$ en $R_t = R_{t-1} = \overline{R} \Rightarrow \Delta R = 0$, dus
$(-0{,}10 + 0{,}00002 \cdot \overline{P}) \cdot \overline{R} = 0$
$-0{,}10 + 0{,}00002 \cdot \overline{P} = 0$
$0{,}00002 \cdot \overline{P} = 0{,}10$
$\overline{P} = 5000$.

```
0.10/0.00002
               5000
```



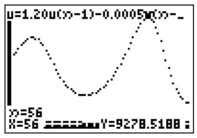
G30c Van $t = 0$ tot $t = 6 \cdot 12 = 72$ is het aantal prooidieren maximaal op $t = 56$.
$P_{max} = P_{56} = 9279$ en $R_{56} = 423$.

```
Plot1 Plot2 Plot3
 nMin=0
 u(n)=1.20u(n-1)
-0.0005v(n-1)u(n
-1)
 u(nMin)={5500}
 v(n)=
 v(nMin)=
```

```
Plot1 Plot2 Plot3
-1)
 u(nMin)={5500}
 v(n)=0.90v(n-1)
+0.00002u(n-1)v(
n-1)
 v(nMin)={300}
 w(n)=
```

n	u(n)	v(n)
0	5500	300
1	5775	303
2	6055.1	307.7
3	6334.5	314.19
4	6606.3	322.58
5	6862.1	332.94
6	7092.2	345.34

n=0



G31a $G_1 = G_0 - a \cdot G_0 \cdot Z_0$, dus $5982 = 6000 - a \cdot 6000 \cdot 100 \Rightarrow a = 0{,}00003$.
$Z_1 = Z_0 + a \cdot G_0 \cdot Z_0 - b \cdot Z_0$, dus $112 = 100 + 0{,}00003 \cdot 6000 \cdot 100 - b \cdot 100 \Rightarrow b = 0{,}06$.

```
(6000-5982)/6000
00
               3E-5
(100+0.00003*600
000-112)/100
                .06
```

G31b De derde dag loopt van $t = 2$ tot $t = 3$. Verder is $G_1 = 9408$ en $Z_1 = 560$.
$G_2 = G_1 - 0{,}00003 \cdot G_1 \cdot Z_1 = 5982 - 0{,}00003 \cdot 5982 \cdot 112 \approx 5962$.
$Z_2 = Z_1 + 0{,}00003 \cdot G_1 \cdot Z_1 - 0{,}06 \cdot Z_1 = 112 + 0{,}00003 \cdot 5982 \cdot 112 - 0{,}06 \cdot 112 \approx 125$.
Dus op de derde dag hebben $0{,}00003 \cdot 5962 \cdot 125 \approx 22$ mensen griep gekregen.
Op de derde dag zijn er $0{,}06 \cdot 125 \approx 8$ mensen beter geworden.

```
5982-0.00003*598
2*112
         5961.90048
112+0.00003*5982
*112-0.06*112
         125.37952
```

```
0.00003*5962*125
            22.3575
0.06*125
                7.5
```

G31c Op de 15^e dag hebben $0{,}00003 \cdot 5456 \cdot 455 \approx 74$ mensen griep gekregen.
Op de 15^e dag zijn er $0{,}06 \cdot 455 \approx 27$ mensen beter geworden.

```
0.00003*5456*455
            74.4744
0.06*455
               27.3
```

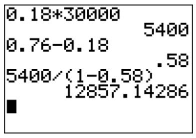
G32a $\boxed{\begin{array}{l} N_t = 0{,}76 \cdot N_{t-1} + 0{,}18 \cdot B_{t-1} \\ B_t = 0{,}24 \cdot N_{t-1} + 0{,}82 \cdot B_{t-1} \\ \text{met } N_0 = 20\,000 \text{ en } B_0 = 10\,000 \end{array}}$

G32b $0{,}76 + 0{,}24 = 1$ en $0{,}18 + 0{,}82 = 1 \Rightarrow$ een gesloten systeem $\Rightarrow N_{t-1} + B_{t-1} = 20\,000 + 10\,000 = 30\,000$ (voor elke t).

$$\left.\begin{array}{l} N_t = 0{,}76N_{t-1} + 0{,}18B_{t-1} \\ B_{t-1} = 30\,000 - N_{t-1} \end{array}\right\} \Rightarrow N_t = 0{,}76N_{t-1} + 0{,}18 \cdot (30\,000 - N_{t-1})$$

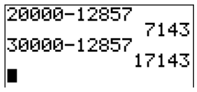
$$N_t = 0{,}76N_{t-1} + 5\,400 - 0{,}18N_{t-1}$$

$$N_t = 0{,}58N_{t-1} + 5\,400 \text{ met } N_0 = 20\,000$$



$N_t = \overline{N} + a^t \cdot (N_0 - \overline{N})$ met $\overline{N} = \frac{b}{1-a} = \frac{5400}{1-0{,}58} = \frac{39}{0{,}42} \approx 12\,857$

$N_t = 12\,857 + 0{,}58^t \cdot (20\,000 - 12\,857) = 12\,857 + 7\,143 \cdot 0{,}58^t$ (voor $t \ge 0$)

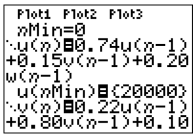


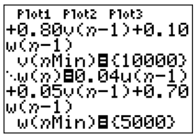
$$\left.\begin{array}{l} B_t = 30\,000 - N_t \\ N_t = 12\,857 + 7\,143 \cdot 0{,}58^t \end{array}\right\} \Rightarrow B_t = 30\,000 - (12\,857 + 7\,143 \cdot 0{,}58^t)$$

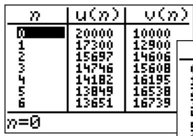
$$B_t = 17\,143 - 7\,143 \cdot 0{,}58^t \text{ (voor } t \ge 0)$$

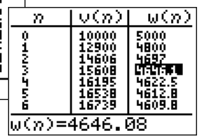
G32c Voor grote t is $0{,}58^t \approx 0$, dus
N_t convergeert naar $12\,857 + 0 = 12\,857$ en B_t convergeert naar $17\,143 - 0 = 17\,143$.

G32d $\boxed{\begin{array}{l} N_t = 0{,}74 \cdot N_{t-1} + 0{,}15 \cdot B_{t-1} + 0{,}20 \cdot G_{t-1} \\ B_t = 0{,}22 \cdot N_{t-1} + 0{,}80 \cdot B_{t-1} + 0{,}10 \cdot G_{t-1} \\ G_t = 0{,}04 \cdot N_{t-1} + 0{,}05 \cdot B_{t-1} + 0{,}70 \cdot G_{t-1} \\ \text{met } N_0 = 20\,000,\ B_0 = 10\,000 \text{ en } G_0 = 5\,000 \end{array}}$







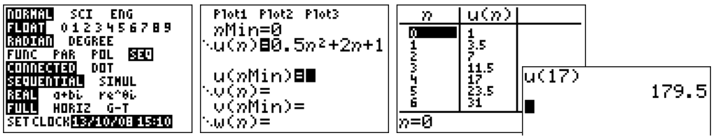


G32e Voer bovenstaande rijen-formules in op de GR (TABLE) $\Rightarrow G_3 \approx 4\,646$.
Dus $4\,646$ inwoners van Middelburg gaan op $t = 3$ niet op vakantie.

TI-84 6. Getallenrijen (met MODE instellen op SEQ)

6A. Het rijen-invoerscherm

1abc Zie de schermen hiernaast.
(formules invoeren in Y=-scherm)
(n met X,T,Θ,n en u is 2nd 7)

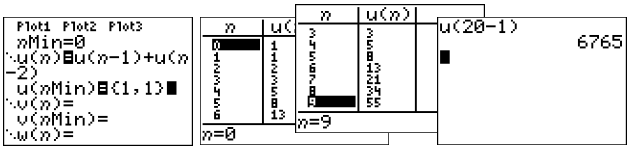


6B. Het invoeren van een recursieve formule

2a Zie het scherm hiernaast. ([,] is de toets boven 7)

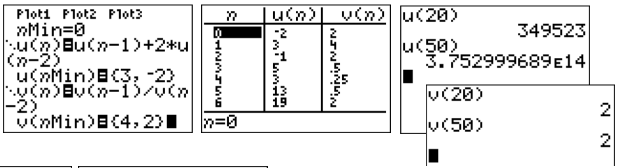
2b 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55. (zie de tabel hiernaast)

2c $u_{19} = 6765$. (blader door de tabel / basisscherm)



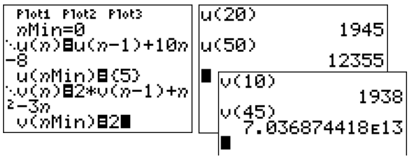
3a $-2, 3, -1, 5, 3, 13, 19$. (zie de tabel hiernaast)
$u_{20} = 349\,523$ en $u_{50} \approx 3{,}753 \times 10^{4}$.

3b 2 4 2 0,5 0,25 0,5 2. (zie de tabel hiernaast)
$u_{20} = 2$ en $u_{50} = 2$.



4a $u_{20} = 1945$ en $u_{50} = 12\,355$.

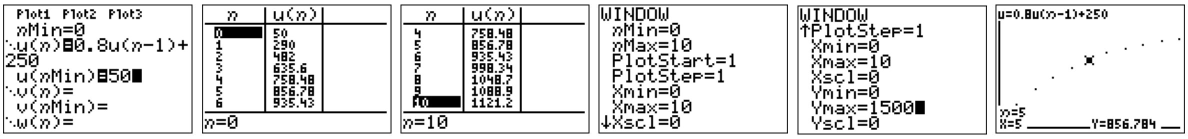
4b $u_{10} = 1938$ en $u_{45} \approx 7{,}037 \times 10^{13}$.



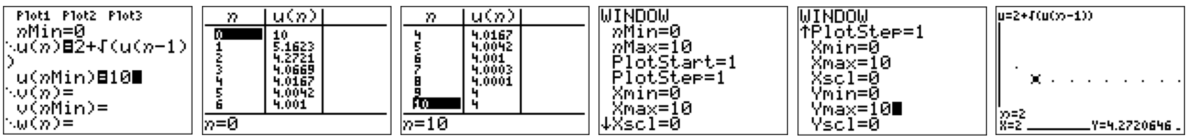
TI-84 7. Grafieken bij rijen

7A. Tijdgrafieken (met 2nd ZOOM =FORMAT instellen op Time)

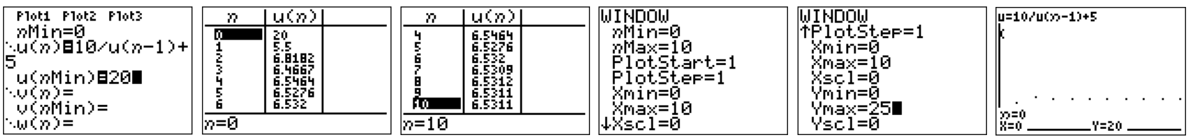
1a Zie de schermen hieronder. (blader eens door TABLE)
Neem (bijvoorbeeld) Ymin = 0 en Ymax = 1500. (met TRACE en ► of ◄ loop je over de grafiek)



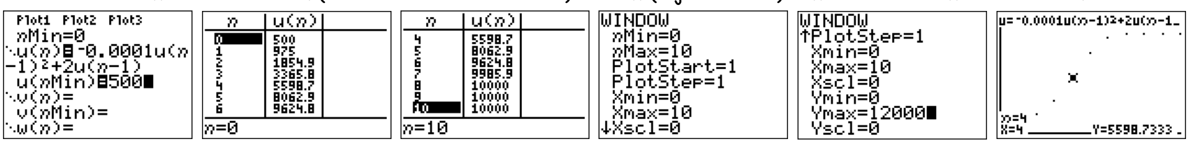
1b Zie de schermen hieronder. (blader eerst door TABLE) Neem (bijvoorbeeld) Ymin = 0 en Ymax = 10.



1c Zie de schermen hieronder. (blader eerst door TABLE) Neem (bijvoorbeeld) Ymin = 0 en Ymax = 25.

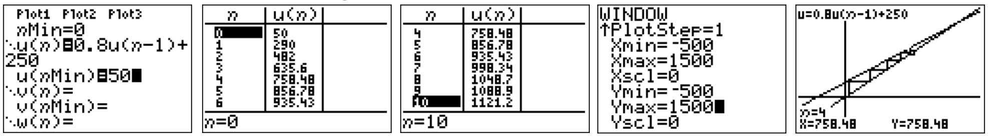


1d Zie de schermen hieronder. (blader eerst door TABLE) Neem (bijvoorbeeld) Ymin = 0 en Ymax = 12000.

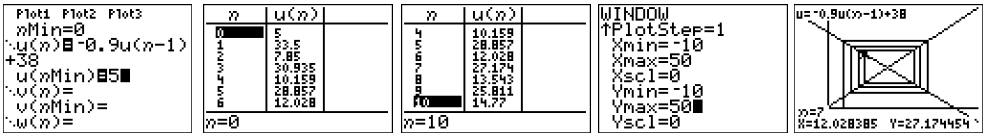


7B. Webgrafieken (met 2nd ZOOM =FORMAT instellen op Web)

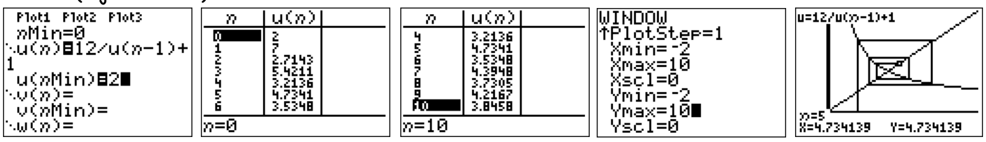
2a Zie de schermen hieronder. (blader eerst door TABLE)
Neem (bijvoorbeeld) Xmin = Ymin = –500 en Xmax = Ymax = 1500.
(met TRACE en ▸ ontstaat de webgrafiek)



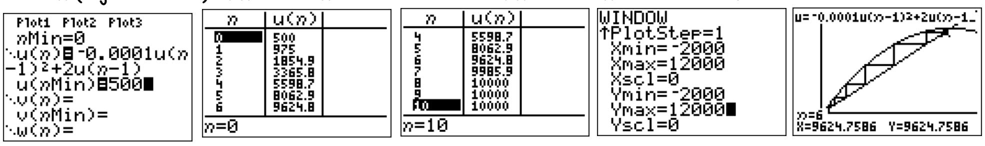
2b Zie de schermen hieronder. (blader eerst door TABLE)
Neem (bijvoorbeeld) Xmin = Ymin = –10 en Xmax = Ymax = 50.



2c Zie de schermen hieronder. (blader eerst door TABLE)
Neem (bijvoorbeeld) Xmin = Ymin = –2 en Xmax = Ymax = 10.



2d Zie de schermen hieronder. (blader eerst door TABLE)
Neem (bijvoorbeeld) Xmin = Ymin = –2000 en Xmax = Ymax = 12000.



- recursieve formule van een rr: $u_n = u_{n-1} + v$ met beginterm u_0
- directe formule van een rr: $u_n = u_0 + v \cdot n$ voor $n \geq 0$
- $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + ... + u_n$
- recursieve somformule van een rr: $S_n = S_{n-1} + u_n$ met $S_0 = u_0$
- directe somformule van een rr: $S_n = \frac{1}{2} \cdot (\underbrace{n+1}_{\text{aantal termen}}) \cdot (\underbrace{u_0}_{\text{eerste term}} + \underbrace{u_n}_{\text{laatste term}})$ voor $n \geq 0$
- $u_{10} + u_{11} + u_{12} + u_{13} + ... + u_{100} = \frac{1}{2} \cdot \underbrace{91}_{\text{aantal termen}} \cdot (\underbrace{u_{10}}_{\text{eerste term}} + \underbrace{u_{100}}_{\text{laatste term}})$

- recursieve formule van een mr: $u_n = u_{n-1} \cdot r$ met beginterm u_0
- directe formule van een mr: $u_n = u_0 \cdot r^n$ voor $n \geq 0$
- $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + ... + u_n$
- recursieve somformule van een mr: $S_n = S_{n-1} + u_n$ met $S_0 = u_0$
- directe somformule van een mr: $S_n = \frac{u_0 - u_{n+1}}{1-r}$ of $\frac{u_0 \cdot (1 - r^{n+1})}{1-r}$ voor $n \geq 0$
- $u_{10} + u_{11} + u_{12} + u_{13} + ... + u_{100} = \frac{u_{10} - u_{101}}{1-r}$ of $\frac{u_{10} \cdot (1 - r^{91})}{1-r}$

- de recursieve formule $u_n = a \cdot u_{n-1} + b$ met beginterm u_0 heeft als directe formule $u_n = \bar{u} + a^n \cdot (u_0 - \bar{u})$ met $\bar{u} = \frac{b}{1-a}$